

Лекции
по электродинамике плазмоподобных сред

Н.Г. Гусейн-заде, А.М. Игнатов, А.А. Рухадзе

Лекция 1.

Что такое плазма и зачем она нужна

Определение плазмы

Первое, и далеко не самое полноценное, определение плазмы принадлежит И. Ленгмюру, который в 1923 г. назвал плазмой “ярко светящийся газ, состоящий из электронов, ионов разных сортов и нейтральных атомов и молекул”. Разумеется, человек наблюдал плазму значительно раньше, за многие тысячелетия до И. Ленгмюра. Это была, например, солнечная плазма. Наблюдая яркие вспышки молний, не подозревал человек и о существовании разрядной плазмы.

Впервые на то, что при прохождении электрического тока через газы наблюдается новое, четвертое состояние вещества, указал У. Крукс во второй половине XIX в. Около ста лет назад О. Хевисайд предсказал существование вокруг Земли на высотах 300–500 км слоя достаточно плотного газа ионизованных частиц, способного, подобно зеркалу, отражать радиоволны. Благодаря этому слою, названному им *F*-слоем ионосферы, на Земле возможна радиосвязь на коротких волнах. По современным представлениям, плотность заряженных частиц в *F*-слое ионосферы достигает $10^6 \div 10^7 \text{ см}^{-3}$ (в зависимости от времени суток) и резко спадает вблизи границы слоя на масштабе порядка десятков километров.

Ионосфера последовательно начала исследоваться лишь в 1930-е гг. с появлением диагностических шаров-зондов. Значительно раньше плазму начали изучать в лаборатории, пытаясь воспроизвести разряд молнии. Впервые на научную высоту эту проблему поднял И. Ленгмюр, который не только получил устойчивый разряд в газах различных сортов и диапазонов давлений, но и ввел еще в 1920-е гг. фундаментальные параметры — плотности электронов (n_e), ионов (n_i) и нейтральных атомов (n_o), а также температуры соответствующих компонентов (T_e, T_i, T_o), которые обычно между собой не равны. Более того, он обнаружил в разрядном токе высокочастотные колебания, фазовая скорость которых значительно превышает тепловую скорость электронов и частота которых не зависит от сорта ионов и нейтральных атомов, получивших название ленгмюровских колебаний. Он открыл также и низкочастотные медленные волны с линейным законом дисперсии.

Сегодня известно большое многообразие разрядных плазм, создаваемых ионизирующим излучением различного типа. В физической электронике применяют ВЧ, СВЧ и оптические разряды в самых разнообразных целях. В первую очередь, это источники света, начиная от осветительных приборов дневного света (неоновые лампы) и заканчивая мощными ультрафиолетовыми источниками накач-

ки оптических квантовых генераторов (ксеноновые, литиевые и др. лампы). Следует также упомянуть многочисленные разрядники-коммутаторы токов, широко используемые в электротехнике. Наконец, используются преобразователи тепловой либо направленной энергии в электрическую — слаботочные ТЭП (тепловые электрические преобразователи) и МГД-преобразователи, в которых используется разряд в скрещенных электрическим и магнитном полях.

Параметры газоразрядных плазм меняются в широчайших пределах. Так, в неоновых лампах $n = n_e \approx n_i \approx 10^{11} \div 10^{13} \text{ см}^{-3}$ при $n_o \approx 10^{13} \div 10^{16} \text{ см}^{-3}$ (т. е. давление газа $P_o \approx 10^{-3}$ Торр), $T_e \approx 10^4 \div 10^5 \text{ К}$ и $T_i \approx 10^3 \text{ К}$. Такая плазма слабоионизована и сильно неизотермична, $T_e \gg T_i$. Такого же порядка параметры плазмы в ТЭПах. Вместе с тем плазма в МГД преобразователях весьма плотна — в ней при атмосферном давлении газа ($n_o \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$) плотность заряженных частиц достигает $n \approx 10^{17} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$ при $T_e \approx T_i \approx 3000 \text{ К}$, т. е. эта плазма высокоионизована и довольно низкотемпературна. Наконец следует отметить, что в отличие от ионосферной плазмы, размеры которой исчисляются десятками и сотнями километров и потому такую плазму практически можно считать пространственно неограниченной, плазма газовых разрядов сильно ограничена, размеры ее не превышают десятков сантиметров и в лучшем случае достигают метров (плазма в МГД-преобразователях).

Особое место занимает термоядерная плазма. В начале 1950-х гг. А. Д. Сахаров и И. Е. Тамм в СССР и Л. Спизер в США предложили схему удержания плазмы в магнитных ловушках. Существует много типов магнитных ловушек, и наиболее распространенными среди них являются ловушки с тороидальной геометрией магнитного поля — токамаки и стеллараторы. Для осуществления термоядерных реакций требуется очень высокая температура плазмы $T_e \approx T_i \approx 10^8 \text{ К}$. Для получения положительного выхода энергии плазма должна удерживаться так, чтобы выполнялся критерий Лоусона $n\tau > 10^{14}$, где n — плотность в см^{-3} , а τ — время удержания в секундах. При $n \approx 10^{14}$ (именно такую плазму стремятся получить в установках с магнитным удержанием) должно быть $\tau \approx 1 \text{ с}$. В магнитных ловушках для этого необходимы напряженности магнитного поля $B_0 \approx 4 \text{ Тл}$.

Кроме термоядерных установок с магнитным удержанием стационарной плазмы, существует также так называемый инерциальный “термояд”. При этом плазму не удерживают, а стремятся разогреть до термоядерных температур с помощью очень мощного источника энергии так, чтобы выполнялся критерий Лоусона. Время разогрева должно быть меньше времени разлета плазмы, которое по порядку величины составляет $\tau = a/v_s$, где a — размер плазмы, а $v_s = \sqrt{T_e/m} \approx 10^8 \text{ см/с}$.

В случае твердотельной мишени $n_e \approx 10^{22} \div 10^{23} \text{ см}^{-3}$ нужно, чтобы время разлета не превышало примерно $10^{-8} \div 10^{-9} \text{ с}$, а следовательно, размер мишени $a \approx 1 \text{ мм}$. Для нагрева мишени таких размеров до термоядерных температур мощность источника энергии должна быть выше $5 \cdot 10^{14} \div 5 \cdot 10^{15} \text{ Вт}$ при полной энергии $Q \approx 0,5 \div 5 \text{ МДж}$.

На сегодняшний день наиболее распространены два способа реализации инерциального термоядерного синтеза — лазерный, предложенный в 1964 г. Н. Г. Басовым и О. Н. Крохиным, и пучковый (электронный либо ионный), предложенный в 1971 г. Винтербергом. В первом из них используется оптический разряд и нагрев плазмы лазерным излучением, а во втором — пучковый разряд и нагрев плазмы плотным сильноточным пучком заряженных частиц.

Говоря о термоядерной плазме, следует упомянуть наше Солнце и другие многочисленные звезды, являющиеся примерами высокотемпературной плазмы. В центральной части звезды температура достигает $T \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ К}$ при плотности порядка $n = 10^{25} \div 10^{26} \text{ см}^{-3}$ и выше (например, в белых карликах). На периферии звезды $T \approx 10^4 \text{ К}$ и $n \approx 1 \div 10 \text{ см}^{-3}$. Изучение такой плазмы представляет собой особый предмет астрофизики и далеко выходит за рамки этого курса.

В заключение настоящего раздела кратко коснемся плазмы твердых тел — полупроводников и металлов. Здесь электроны находятся в сильном периодическом поле кристаллической решетки и можно говорить о возбуждениях с положительным либо отрицательным зарядом. Спектры собственных значений этих возбуждений $\epsilon(p)$ образуют зонную структуру, в которой чередуют зоны проводимости и запрещенные зоны, по порядку величины составляющие $1 \div 10 \text{ эВ}$. Эффективные массы зависят от импульса и в случае полупроводников составляют для положительных носителей заряда $m_+ \approx m_e$, а для отрицательных $m_- \approx 0,1 \div 0,01 m_e$. В металлах же $m_- \approx m_e$, причем можно считать что электроны в металле образуют свободный газ (либо жидкость), поскольку ширина зоны проводимости весьма широка, т.е. металл как бы состоит из одной зоны проводимости. В теории металлов и полупроводников оперируют возбуждениями как свободными квазичастицами и применяют все методы теории газовой плазмы. Однако такой подход требует большой осторожности, поскольку любое воздействие, сравнимое по энергии с шириной запрещенной зоны и, тем более, с шириной зоны проводимости меняет зонную структуру в целом, и такой подход оказывается неприменимым. Поэтому ниже плазму твердого тела мы рассматривать по существу не будем. Кратко коснемся лишь плазмы металлов, где

плотность свободных электронов достигает $n_e \approx 10^{21} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и при обычных температурах электроны представляют собой вырожденный газ, поскольку их энергия Ферми $\epsilon_{Fe} = (3\pi^2)^{2/5} \hbar^2 n_e^{-2/3} / 2m \approx 1 \text{ эВ}$. Именно особенности электронной плазмы металлов, связанные с их вырождением, и будут обсуждаться ниже.

Из сказанного видно, как широко распространена плазма в природе. Говорят, что 99,99% вещества во Вселенной находится в плазменном состоянии, и не случайно плазму называют четвертым агрегатным состоянием вещества. Мы будем в основном заниматься газовой плазмой, состоящей из газа электронов, ионов и нейтральных частиц, и немного — вырожденным газом свободных электронов в металлах.

Почему и когда плазму можно считать газом

Рассматривая плазму как газ электронов, ионов и нейтральных частиц, прежде всего нужно хорошо представлять характер взаимодействия между частицами разного сорта. Л. Больцман, когда рассматривал эту проблему для газа из нейтральных атомов и молекул прекрасно понимал, что взаимодействие между частицами сильное, но находятся они на большом расстоянии друг от друга и поэтому редко сталкиваются. Больцман считал частицы твердыми шариками радиуса $a = 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ см}$ и потому рассматривал потенциал взаимодействия в виде

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (1)$$

В качестве параметра газовости он считал малость радиуса взаимодействия по сравнению со средним расстоянием между частицами

$$\eta_0 = \frac{a}{r} = an_0^{1/3} \ll 1 \quad (2)$$

Очевидно, что этот параметр газовости должен выполняться и в плазме для электрон-нейтрального и ион-нейтрального взаимодействий, поскольку нейтральную частицу для электрона и иона с хорошей степенью точности, также можно считать твердым шариком с радиусом $a \approx 10^{-7} \div 10^{-8} \text{ см}$.

Неравенство (2) означает, что частицы, с которыми испытывают столкновения электроны, ионы и нейтралы настолько далеки друг от друга, что столкновения с ними происходят редко, и большую часть времени частицы двигаются свободно, не испытывая никаких воздействий. Это результат малости радиуса взаимодействия (или размера) частиц по сравнению со средним расстоянием между ними.

Несколько иной физический смысл имеет условие газовости при учете кулоновского взаимодействия между заряженными частицами. Взаимодействие это дальнедействующее, а поэтому газовое приближение справедливо, если оно мало по сравнению со средней энергией самой частицы, т. е.

$$U(r) \approx e^2 n_e^{1/3} \ll \langle \epsilon \rangle = \begin{cases} T & \text{при } T > \epsilon_{Fe}, \\ \epsilon_{Fe} & \text{при } T < \epsilon_{Fe}. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, условие газовости записывается в виде

$$\eta_1 = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{\langle \epsilon \rangle} \ll 1, \quad (4)$$

где $n_e \approx n_i \approx n$. Для невырожденной плазмы, в которой $\langle \epsilon \rangle \approx T \sim T_e \sim T_i$ условия (2) и (4) по физической природе подобны — чем менее плотный газ (как нейтральная, так и заряженная его компоненты), тем идеальнее плазма, и тем лучше выполняется условие газовости. Для вырожденной заряженной компоненты плазмы все наоборот. Поскольку $\langle \epsilon = \epsilon_{Fe} \rangle \sim n^{2/3}$, оказывается, что средняя энергия кулоновского взаимодействия с ростом плотности растет (как $n^{1/3}$) медленнее, чем средняя энергия частиц $\epsilon_{Fe} \sim n^{2/3}$. В результате $\eta_1 \sim n^{-1/3}$, а следовательно, чем плотнее вырожденная компонента плазмы, например металла, тем лучше для нее выполняется условие газовости. Как уже отмечалось выше, условие газовости (2) означает, что среднее расстояние между нейтральными частицами, с которыми взаимодействуют частицы плазмы, значительно больше радиуса взаимодействия, которое является короткодействующим с радиусом a . В этом смысле условие газовости (4) имеет полностью противоположный смысл. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим потенциал пробного точечного заряда q , помещенного в невырожденной плазме в точке $r = 0$. Он находится из уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi q\delta(\mathbf{r}) + 4\pi e [n_e e^{+e\varphi/T_e} - n_i e^{-e\varphi/T_i} - n_e + n_i]. \quad (5)$$

Заряды электронов и ионов для простоты считаем равными их плотности в отсутствие пробного заряда, соответственно n_e и n_i . Предполагая $|e\varphi| \ll T_e, T_i$ из (5) находим

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}, \quad (6)$$

где $r_D = \left\{ \sum_{e,i} (v_{T\alpha}^2 / \omega_{p\alpha}^2)^{-1} \right\}^{-1/2}$ — так называемый дебаевский радиус, на котором распространяется кулоновское взаимодействие частиц; на расстояниях, больших дебаевского радиуса, оно экспоненциально мало. Теперь мы можем сравнить среднее расстояние между заряженными частицами $n^{1/3}$ с дебаевским радиусом r_D .

Убедимся, что

$$r_D n^{1/3} \approx \sqrt{\frac{T}{e^2 n^{1/3}}} \sim \frac{1}{\eta_1^{1/2}} \gg 1, \quad (7)$$

т. е. дебаевский радиус в газовой плазме намного превосходит среднее расстояние между частицами, а поэтому внутри сферы с радиусом r_D заключено много заряженных частиц. Легко показать, что это утверждение справедливо и для вырожденной плазмы.

Таким образом, условие (4) по физической природе противоположно условию (2). Первое носит временной характер — время свободного пролета частиц велико по сравнению со временем взаимодействия, т. е. частицы большую часть времени не испытывают взаимодействия. Напротив, в случае (4) частицы все время испытывают взаимодействие друг с другом, и в этом смысле плотно упакованы. Однако при этом взаимодействие слабое, и его влияние на свободное движение незначительно.

Очевидно, плазму можно рассматривать как среду, а не простую совокупность заряженных частиц, если ее размеры намного превосходят дебаевский радиус. Только при этом последний имеет физический смысл.

Приведем оценки условий применимости газового приближений (2) и (4) для различных плазм. Прежде всего заметим, что в нейтральных газах при $a \approx 10^{-7} \div 10^{-8}$ см (размер атомов и молекул) условие (2) выполняется вплоть до $n_0 \lesssim 10^{21} \div 10^{22}$ см $^{-3}$, т. е. при комнатной температуре при давлениях до сотен атмосфер. Очевидно, что как ионосферной, так и в лабораторной плазме это условие выполняется с большим запасом.

Несколько иное положение имеет место для условия (4). Так, в ионосферной плазме, где $n_e \approx 10^6 \div 10^7$ см $^{-3}$, а $T_e \approx 10^4$ К имеем $\eta_1 \lesssim 10^{-4}$, т. е. условие газовой природы прекрасно выполняется. В обычных газоразрядных лампах дневного освещения, а также в используемых в лабораторных экспериментах, где $n_e \approx 10^{10} \div 10^{14}$ см $^{-3}$, а $T_e \approx 10^4 \div 10^5$ К величина $\eta_1 \ll 1$. Однако в разрядах в плотных газах, используемых в качестве источников света для накачки лазеров как правило $n_e \approx 10^{18} \div 10^{19}$ см $^{-3}$, а $T_e \approx 1 \div 10^5$ К. При этом $\eta_1 \approx 0,1 \div 0,5$, что свидетельствует о значительном нарушении условия газовой природы и существенном проявлении свойств неидеальности плазмы.

В термоядерной плазме в установках с магнитным удержанием $n_e \approx 10^{14} \div 10^{15}$ см $^{-3}$, а $T_e \approx T_i \approx T_i \approx 10^8$ К. В результате имеем $\eta_1 \approx 10^{-5} \ll 1$, т. е. идеальность плазмы гарантирована. Однако в плазме инерционного термоядерного синтеза, где стремятся к значениям $n_e \approx n_i > 10^{24} \div 10^{25}$ см $^{-3}$ при $T \approx 10^8$ К

оказывается, что $\eta_1 \geq 0,01$, а может и больше, что требует учета слабой неидеальности плазмы.

Наконец, совсем кратко, об идеальности электронной плазмы металлов. Даже в хороших проводниках типа меди, где $n_e \approx 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$) и $\epsilon_{Fe} \sim 1 \text{ эВ}$ имеем $\eta_1 \approx 1$, т. е. плазма металлов всегда неидеальна и скорее можно говорить об электронной жидкости. Тем не менее, оказывается, что применение газового приближения к металлам приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными данными. Это было объяснено в 1957–1958 гг. теорией Ферми-жидкости Силина–Ландау. Однако эти проблемы, так же как и проблемы неидеальной газовой плазмы, которые в настоящее время бурно обсуждаются в литературе, выходят за рамки нашего курса.

Лекция 2.

Модели плазмы. I

Простейшая одночастичная модель изотропной плазмы

Приступая к описанию свойств плазмы, следовало бы сразу же начать с наиболее строгого кинетического ее описания. Однако исторически изначально применялись простейшие модели, которые в определенных случаях приводили к очень неплохим с точки зрения эксперимента результатам. Окрыленные успехом, исследователи порой выходили за рамки применимости используемых моделей, и их ждало горькое разочарование. Причины неудач анализировались, модели усовершенствовались, и наконец теоретики пришли к самому полному и строгому описанию плазмы, которое было основано на кинетическом уравнении с самосогласованным полем. Эту модель в литературе еще принято называть системой уравнений Власова–Максвелла. Безусловно, эта модель, как самая полная, является и самой сложной. Поэтому до сегодняшнего дня часто используются более простые модели, порой без оглядки на их ограниченность. Естественно, при этом нередки случаи ложных открытий и ошибочных утверждений.

Для того чтобы уберечь читателя от таких ошибок, мы решили повторить вкратце исторический путь, особо подчеркнув при этом применимость и ограниченность первых простейших моделей динамики плазмы.

Начнем с самой простой модели — модели независимых частиц, представляющих систему уравнений Ньютона для электронов и ионов. Именно эта модель использовалась И. Ленгмюром для описания колебательных свойств газоразрядной плазмы, а особенно успешно В. Л. Гинзбургом для описания распространения радиоволн через ионосферу.

Полная система уравнений этой модели выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} &= \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_e \mathbf{v}_e + \nu_{ei} \mathbf{v}_i, \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -\frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_i \mathbf{v}_i + \nu_{ei} \mathbf{v}_e.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_i скорости электронов и ионов, движущихся под действием электростатического (\mathbf{E}) и магнитного (\mathbf{B}) полей, а ν_e и ν_i — частоты их столкновений, определяющие силы трения $m\nu_e \mathbf{v}_e$ и $M\nu_i \mathbf{v}_i$. При этом $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$, а $\nu_i = \nu_{ie} + \nu_{in}$ причем, согласно третьему закону Ньютона $m\nu_{ei} = M\nu_{ie}$. Для простоты электроны и ионы считаются однозарядными.

Уравнения движения (8) дополняются уравнениями Максвелла для полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , имеющих непосредственный физический смысл, поскольку они определяют измеряемую силу Лоренца

$$\mathbf{F} = q \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\}, \quad (9)$$

фигурирующую в уравнениях движения. Как физические величины они могут быть только конечными, либо терпеть конечные скачки. Уравнения Максвелла записываются в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho = 4\pi \sum en, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum en\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем согласно закону сохранения заряда для каждого сорта частиц (электронов и ионов) выполняется уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad \alpha = e, i. \quad (11)$$

Таким образом, электромагнитные поля согласно (8) определяют движение заряженных частиц, а последние, в свою очередь, являясь источниками в уравнениях (10), определяют сами поля. Тем самым, движения частиц и полей между собой согласованы. Эту идею согласования еще в 1920-е гг. выдвинул И. Ленгмюр, хотя до сих пор встречаются крупные физики, которые ее не понимают.

Из (10) следует еще один важный вывод о том, что в рассматриваемой модели в уравнениях поля появляется только одна дополнительная векторная величина — ток, который и находится из решения уравнения движения (8). Заряд в плазме, согласно уравнениям непрерывности (11) всегда можно выразить через ток. Таким образом, задача модели заключается в нахождении материального уравнения, связывающего ток с полем \mathbf{E} (поле \mathbf{B} с помощью одного из уравнений Максвелла всегда выражается через \mathbf{E}) т. е. в нахождении нелинейного, вообще говоря, закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sum en\mathbf{v} = \hat{\sigma}_{ij} E_j, \quad (12)$$

здесь $\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{E})$ — тензорный нелинейный оператор.

Часто вместо тока \mathbf{j} и заряда $\rho = \sum en$ вводят одну векторную величину — индукцию \mathbf{D} , определив ее как

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}. \quad (13)$$

Уравнения (10) в результате примут очень простой и более привычный вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho_0, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Эти уравнения отличаются от (10) тем, что в них добавлены внешние источники поля — плотность заряда \mathbf{j}_0 и плотность тока ρ_0 .

Таким образом, задачей модели плазмы, а именно, системы уравнений движения (8) является определение связи $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ (закон Ома), либо $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ (закон индукции). Это полностью эквивалентные задачи.

Все достоинства и недостатки уравнений (8) можно понять рассмотрев чисто линейные задачи, считая поля \mathbf{E} и \mathbf{B} малыми. Тем самым предполагается, что внешние поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 отсутствуют, так же как отсутствуют внешние источники ρ_0 и \mathbf{j}_0 .

В этих предположениях из (8) находим очень простые решения, зависящие от времени и координат в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Именно

$$\mathbf{v}_e = \frac{ie\mathbf{E}}{m(\omega + i\nu_e)}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{-ie\mathbf{E}}{M(\omega + i\nu_i)}.$$

Отсюда легко находим ток, индуцированный в плазме, и проводимость

$$\mathbf{j} = \sum en\mathbf{v} = \sum \frac{ie^2}{m} \frac{n\mathbf{E}}{\omega + i\nu} \equiv \sigma\mathbf{E}. \quad (15)$$

Суммирование, очевидно, распространяется по заряженным носителям. Таким образом,

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma\delta_{ij} \Rightarrow \sigma = \sum \frac{ie^2n}{m(\omega + i\nu)}, \quad (16)$$

а согласно определению (13)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon = 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad (17)$$

где $\omega_{L\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha}}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α .

Исходя из результатов (14)–(17) покажем теперь основные достоинства и недостатки рассматриваемой модели. Прежде всего заметим, что в статическом пределе

$$\sigma \rightarrow \sum \frac{e^2n}{m\nu} \approx \frac{e^2n_e}{m\nu_e}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}. \quad (18)$$

Здесь σ — статическая проводимость. В случае слабоионизованной плазмы, в которой $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$, найденная проводимость оказывается правильной как качественно, так и количественно, причем $\nu_e = \pi a^2 v_{Te} n_0$. В полностью ионизованной

же плазме, в которой $\nu_{en} \ll \nu_{ei} = \nu_e \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m} \frac{e^4 n_e}{T_e^{3/2}}}$ (вероятность столкновения электронов с тяжелыми ионами) формула (18) приводит примерно в 2 раза заниженному результату по сравнению с известной формулой Л. Спитцера (в случае однозарядных ионов):

$$\sigma = 1,96 \frac{e^2 n_e}{m \nu_{ei}}. \quad (20.1)$$

Количественно правильно описывает формула (17) также распространение высокочастотных поперечных электромагнитных волн в плазме, дисперсионное уравнение которых, по сути, является условием существования нетривиальных решений уравнений Максвелла, и для поперечных волн записывается в виде

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega). \quad (19)$$

Подставляя сюда выражение (17) и учитывая условие высокочастотности ($\omega \gg \nu_e$), легко находим спектр ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (20)$$

Что касается низкочастотного предела, то уравнение (19) описывает в этом пределе обычный скин-эффект — непроникновение поля в проводящую среду из-за его сильного поглощения в поверхностном слое. Для глубины скин-слоя в низкочастотном пределе ($\omega \ll \nu_e$) из (19) следует

$$\lambda = \frac{1}{\text{Im } k} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (21)$$

Формула правильная, если учесть неточность самого выражения низкочастотной проводимости в полностью ионизованной плазме. Более существенным является то, что в области частот $\omega \gg \nu_e$ скинирование поля и его поглощение в поверхностном слое происходит иначе, что не учитывается настоящей моделью.

Еще в большей степени ограниченность модели проявляется на примере продольных волн, описываемых уравнением

$$\varepsilon(\omega) = 0. \quad (22)$$

Подставляя сюда выражение (17) в области высоких частот находим спектр ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2}. \quad (23)$$

Именно эти волны были открыты И. Ленгмюром и получили название ленгмюровских колебаний.

Несмотря на успех объяснения ленгмюровских колебаний, у изложенной выше модели выявился серьезный недостаток — она не смогла объяснить существование

в разряде низкочастотных волн с линейным законом дисперсии, подобных звуковым волнам, которые наблюдались И. Ленгмюром. Еще более серьезным провалом для модели оказалась задача о поле пробного точечного заряда в плазме. Действительно, рассмотрим точечный переменный заряд $q \exp(-i\omega t)$. Легко показать, что поле такого заряда в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой

$$\varphi(r) = \frac{qe^{-i\omega t}}{r\varepsilon(\omega)}. \quad (24)$$

Однако если сюда подставить выражение (17) и перейти к пределу $\omega \rightarrow 0$ (т. е. $\varepsilon(\omega) \rightarrow \infty$) получим абсурдный результат, отличный от приведенного в предыдущем разделе.

Таким образом, если высокочастотные свойства плазмы одночастичной моделью объясняются неплохо, то области низких частот разумных результатов не получается. Поэтому появились новые, более сложные модели.

Одночастичная модель для описания свойств магнитоактивной плазмы

В то же время, применение одночастичной модели к магнито-активной плазме, в особенности к проблемам распространения радиоволн в ионосфере, привели к триумфу модели.

Решая линеаризованную систему уравнений (8) при наличии внешнего однородного магнитного поля \mathbf{B}_0 , направленного вдоль оси OZ , после несложных вычислений, получим выражение для тензора диэлектрической проницаемости — тензор диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \sum \frac{\omega_L^2(\omega + i\nu)}{\omega[\Omega^2 - (\omega + i\nu)^2]}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)},$$

$$g = \sum \frac{\omega_L^2 \Omega}{\omega[\Omega^2 - (\omega + i\nu)^2]} \quad (26)$$

и $\Omega_{\alpha} = e_{\alpha} B_0 / m_{\alpha} c$ — циклотронная частота частиц сорта α .

Дисперсионное соотношение, определяющие условие существования нетривиальных решений уравнений Максвелла (14) в отсутствие внешних источников в

рассматриваемом случае записывается в виде

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right| = k^2 (k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}) - \frac{\omega^2}{c^2} [(\varepsilon_{\perp}^2 - g^2 - \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}) k_{\perp}^2 + 2k^2 \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}] + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) = 0. \quad (27)$$

Здесь $k_{\perp} = k \sin \theta$, а $k_{\parallel} = k \cos \theta$ поперечная и продольная составляющая волнового вектора \mathbf{k} .

В общем случае уравнение является уравнением высокого порядка относительно ω , и в общем случае зависимость $\omega(\mathbf{k})$ найти трудно. Вместе с тем уравнение (27) является биквадратным относительно $k(\omega)$. Именно в такой формулировке, которую принято называть оптической, и решается эта задача в теории распространения радиоволн. В терминах комплексного показателя преломления $k = n \frac{\omega}{c}$ решения (27) записываются в виде

$$n_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta, \\ B &= -\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_{\perp}^2 - g^2) \sin^2 \theta, \\ C &= \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\parallel}^2 - g^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Волну с показателем n_1 — называют обыкновенной, а с n_2 — необыкновенной. С помощью этих формул были довольно хорошо объяснены особенности распространения радиоволн через ионосферу: области их существования как слабозатухающих волн ($\text{Re } n^2 > 0$), поглощения ($\text{Im } n$) и отражения ($\text{Re } n^2 < 0$) как функции угла распространения θ .

На рис. 1 представлены зависимости $n_{1,2}^2(\omega)$ для $\theta \neq 0, \pi/2$ и $\omega_{Le}^2 > \Omega_e^2$ (как это имеет место в F -слое ионосферы, $\omega_{Lmax} \approx 10^8 \text{ с}^{-1}$, $\Omega_e \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$).

Хорошее количественное объяснение получили наблюдаемые низкочастотные поперечные волны в области частот $\omega_i \ll \omega \ll \Omega_e$, известные как свистящие атмосферерики или геликоны, со спектром частот

$$\omega = \frac{k^2 c^2 \cos \theta \Omega_e}{\omega_{Le}}. \quad (30)$$

Менее успешным оказалось описание волн в области самых низких частот $\omega \ll \Omega_i$, спектры которых существенно зависят от ионного компонента плазмы. Здесь теория, основанная на рассматриваемой модели, предсказывает две ветви колебаний

$$\omega_1^2 = \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}, \quad \omega_1^2 = \frac{k^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2}. \quad (31)$$

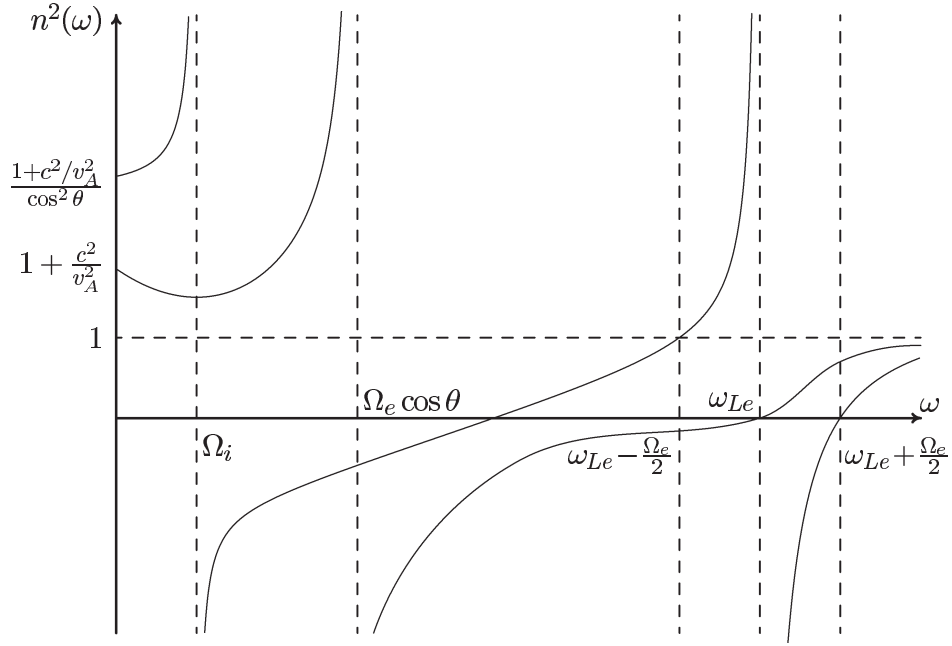


Рис. 1: Функция $n^2(\omega)$ в модели независимых частиц при $\theta \neq 0, \pi/2$. $v_A = \sqrt{B_0^2/4\pi NM}$ — альфвеновская скорость

Первая из этих ветвей описывает чисто поперечную волну, известную как альфвеновская волна, а вторая ветвь — гидродинамическую, называемую еще быстрой. Однако измеренный в ионосферных экспериментах спектр несколько отличается от описываемого формулой (31) — фазовая скорость оказывается несколько большей. При этом отличие фазовой скорости от (31) зависит от массы ионов и температуры плазмы. В рассматриваемой же модели температура плазмы вообще не фигурирует. Более того, кроме пяти ветвей представленных на рис. 1 в экспериментах наблюдается и 6-ая ветвь с линейным законом дисперсии, которая и оказывается камнем преткновения для модели.

Рассмотрим теперь задачу о точечном заряде в магнитоактивной плазме и определим поле переменного точечного заряда $q \exp(-i\omega t)$ в плазме с диэлектрической проницаемостью вида (25), (26).

Решение уравнения Пуассона (14) с $\rho_0 = q \exp(-i\omega t) \times \delta(\mathbf{r})$ при этом дает ответ (ср. с (24))

$$\Phi(r) = \lim_{\omega \rightarrow 0} q e^{-i\omega t} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_{\parallel}^2 \varepsilon_{\parallel}} \rightarrow 0. \quad (32)$$

Как и выше, мы получаем нулевой потенциал, то есть абсурдный по своему смыслу результат.

Таким образом, в низкочастотном пределе модель независимых частиц явно непригодна, и это было понятно уже в начале 1930-х гг., когда и начался поиск

новых моделей. К сказанному выше добавляются разногласия с экспериментальными данными, связанными с затуханием волн. В рассмотренной выше модели затухание обусловлено столкновениями частиц, трением одних сортов частиц о другие. В экспериментах же наблюдалось затухание, обусловленное вязкостью, теплопроводностью и диффузией и, кроме того, недиссипативное затухание, природа которого была неясна, но которое проявлялось в явно бесстолкновительных случаях.

Таким образом, с одной стороны, требовалось усовершенствование гидродинамического описания плазмы как сплошной среды, а с другой — развитие ее кинетического описания.

Лекция 3. Модели плазмы. II

Гидродинамические модели плазмы. Двухжидкостная гидродинамика

Как уже отмечалось, в случае модели независимых частиц все трудности при описании плазмы возникали в области низких частот, потому что очень быстро исследователи обратились к гидродинамике, которая как раз и приспособлена для описания низкочастотных процессов.

Здесь возникли два направления. И. Ленгмюр решил усовершенствовать модель независимых частиц, введя в них давление частиц и сформулировав модель двухжидкостной гидродинамики. В свою очередь, Х. Альфвен начал применять к ионосферным экспериментам одножидкостную гидродинамику проводящей жидкости, которую сам и сформулировал. Ниже мы изложим простейшие варианты этих моделей.

Начнем с модели двухжидкостной гидродинамики, представляющей собой простое обобщение системы (8):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e &= \\
 &= -\frac{\nabla(n_e T_e)}{m n_e} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_e \mathbf{v}_e + \nu_{ei} \mathbf{v}_i, \\
 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i &= \\
 &= -\frac{\nabla(n_i T_i)}{M n_i} - \frac{e}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right\} - \nu_i \mathbf{v}_i + \nu_{ei} \mathbf{v}_e.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Эта система, очевидно, дополняется системой уравнений непрерывности (11) и уравнениями Максвелла в форме (10) либо (14). Что касается уравнения для $T_{e,i}$, т.е. уравнения баланса энергии (или уравнение для тепла), мы простоты ради изменением температуры пренебрежем, полагая $T_{e,i} = \text{const}$. Это существенно облегчает анализ и не влияет на границы применимости модели, которые и являются основной целью данного раздела.

Уравнения (33) отличаются от (8) двумя важными слагаемыми. Во-первых, они содержат нелинейные слагаемые $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ как в электронной, так и в ионной компонентах, что позволяет значительно расширить рамки одночастичной модели, включив в рассмотрение быстрые надтепловые потоки и процессы, связанные с их наличием в плазме. С другой стороны, уравнения включают тепловые слагаемые и это позволяет надеяться на их применимость для описания низкочастотных процессов, в случае которых одночастичная модель потерпела провал.

Для того чтобы убедиться в сказанном, получим в рамках этой модели выражение для диэлектрической проницаемости. Начнем для простоты с ненамагниченной, покоящейся плазмы:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_{e0,i0} = 0, \quad n_{e0,i0} = \text{const}. \quad (34)$$

Рассматривая малые отклонения от этого состояния из (33) находим следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k), \quad (35)$$

где

$$\varepsilon^{\text{tr}} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu)}, \quad \varepsilon^l = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu) - k^2 v_T^2}. \quad (36)$$

Прежде всего заметим, что тензор диэлектрической проницаемости в рассматриваемой модели содержит две независимые компоненты, что является правильным. Во-вторых, поперечная диэлектрическая проницаемость совпадает с (17), и поэтому все достоинства и недостатки модели независимых частиц связанные с поперечным полем (волной) сохраняются и в этой модели, а именно, в низкочастотной области ε^{tr} неправильно описывает проникновение поперечного электромагнитного поля в плазму.

Что касается продольной диэлектрической проницаемости (36), то в пределе $\omega \rightarrow 0$ она принимает вид

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} = 1 + \frac{1}{kr_D^2}, \quad (37)$$

что правильно описывает дебаевскую экранировку потенциала точечного заряда в плазме (ср.с (32)):

$$\Phi(r) = q \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon^l(0, k)} = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}, \quad (38)$$

где r_D — определенный выше дебаевский радиус. Таким образом, модель двухжидкостной гидродинамики с конечной температурой хорошо описывает статический предел продольной электрической проницаемости, и тем самым, электростатические свойства изотропной плазмы.

Более того, следует отметить, что в низкочастотной области, $\omega \ll \nu$, продольная диэлектрическая проницаемость (36) хорошо описывает не только дебаевскую экранировку, но и как одночастичную, так и коллективную амбиполярную диффузию. Действительно, в этом пределе (36) принимает вид

$$\varepsilon^l = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{i\omega\nu - k^2 v_T^2}. \quad (39)$$

Для систем размеры которых меньше дебаевского радиуса данного сорта частиц, т. е. $k^2 v_{T\alpha}^2 \gg \omega_{L\alpha}^2$, нули выражения (39) имеют вид

$$i\omega\nu_\alpha - k^2 v_{T\alpha}^2 = 0. \quad (40)$$

Легко сообразить, что это соотношение совпадает с дисперсионным соотношением монополярной (одночастичной) диффузии

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} - \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_\alpha} \Delta n_\alpha = 0. \quad (41)$$

Таким образом коэффициент монополярной диффузии частиц сорта α

$$D_\alpha = \frac{v_{T\alpha}^2}{\nu_\alpha}. \quad (42)$$

Если же система больше дебаевского радиуса, то в выражении (39) первым слагаемым можно пренебречь и его нули описывают амбиполярную диффузию. Действительно в этом случае, решением уравнения $\varepsilon^l = 0$ является соотношение

$$i\omega\nu_i - k^2(v_s^2 + v_{Ti}^2) = 0, \quad (43)$$

где $v_s = \sqrt{T_e/M}$. Также как и выше, это соотношение мы сопоставляем диффузионному уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_\alpha \Delta n = 0, \quad (44)$$

с коэффициентом амбиполярной диффузии

$$D_\alpha = \frac{v_s^2 + v_{Ti}^2}{\nu_i} = \frac{T_e + T_i}{M\nu_i}. \quad (45)$$

Легко сообразить, что в области фазовых скоростей процессов, значительно превосходящих тепловые скорости, двухжидкостная модель совпадает с рассмотренной выше одночастичной моделью, и в этом смысле все высокочастотные процессы ею описываются правильно, в том числе и распространение радиоволн через ионосферу.

Однако кроме указанного выше недостатка в низкочастотном пределе поперечной диэлектрической проницаемости, есть еще один недостаток, той же природы, но уже в продольной диэлектрической проницаемости. Именно, как видно из второго выражения (36) в бесстолкновительном пределе ($\nu \rightarrow 0$) выражение (36) обладает полюсами

$$\omega^2 = k^2 v_{Te,i}^2. \quad (46)$$

Физический полюс продольной диэлектрической проницаемости соответствует одночастичным (без учета самосогласованного поля) колебаниям плотности плазмы.

Спектры (46) в этом смысле напоминают звуковые колебания. Однако без учета полевого взаимодействия и при полном пренебрежении столкновениями таких колебаний быть не может, и ниже будет показано, что они благодаря бесстолкновительному механизму поглощения сильно затухают в плазме.

Укажем еще на одну очень распространенную ошибку, возможную при анализе низкочастотных продольных волн в рамках двухжидкостной гидродинамики, при которой продольная диэлектрическая проницаемость (36) обращается в нуль. Речь идет о колебаниях с длиной волны больше дебаевского радиуса плазмы и частотой, ниже ленгмюровских частот электронов и ионов. Дисперсионное уравнение таких колебаний, согласно (36), имеет вид

$$\omega^2 - k^2(v_{Ti} + v_s) + i\omega\nu_i = 0. \quad (47)$$

Отсюда следует спектр слабозатухающих колебаний ($\omega \leftarrow \omega + i\delta$):

$$\omega = k\sqrt{\frac{T_e + T_i}{M}}, \quad \delta = -\frac{\nu_i}{2}. \quad (48)$$

Эти колебания называют ионным звуком. В действительности этот спектр не совсем точен, что ниже будет показано. Более того, ни в газоразрядной плазме, ни в ионосферной этот спектр точно идентифицировать не удалось, поскольку, с одной стороны, он похож на изотермический ($\gamma = 1$), а с другой, ионная компонента явно не удовлетворяет условию изотермичности ($\omega \gg kv_{Ti}, \gamma_i$).

Выше мы умышленно ограничились анализом низкочастотных процессов в модели двухжидкостной гидродинамики только для изотропной плазмы, т. е. в отсутствие внешнего магнитного поля. Именно такая плазма и исследовалась в газовом разряде И. Ленгмюром еще в 1930-е гг. Что касается магнитоактивной плазмы, то она в это время интересовала ученых в основном с целью изучения распространения радиоволн в ионосфере. Низкочастотные процессы в ионосфере впервые заинтересовали Х. Альфвена в конце 1940-х гг. Для их описания он применял одножидкостную магнитную гидродинамику, которую сам же и сформулировал в полной аналогии с обычной гидродинамикой. Опыт оказался успешным, и только после этого ученые вновь обратились к модели двухжидкостной гидродинамики, считая ее более микроскопической и пытаясь с ее помощью обосновать одножидкостную гидродинамику.

Гидродинамические модели плазмы. Одножидкостная гидродинамика

В поисках объяснения низкочастотных ионосферных процессов Х. Альфвен в конце 1940-х гг. записал уравнения магнитной гидродинамики проводящей жид-

кости в полной аналогии с уравнениями гидродинамики с той лишь разницей, что на жидкость с током, движущуюся в магнитном поле, кроме градиента давления действует сила Ампера

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = \frac{1}{4\pi}[\text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}]. \quad (49)$$

Обычный эмпирический вывод этих уравнений можно найти в книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лившица “Электродинамика сплошных сред”. Мы здесь этого вывода воспроизводить не будем. Приведем сразу их окончательную форму, причем ограничимся случаем идеальной жидкости (в том числе идеальной проводимости)

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость, ρ — плотность жидкости, а P — давление, которое определяется уравнением состояния, связывающим между собой давление P , плотность ρ и температуру T жидкости

$$P = P(\rho, T). \quad (51)$$

Как и выше, здесь мы ограничимся анализом уравнений магнитной гидродинамики (50) и (51) в линейном приближении для малых отклонений, считая равновесное состояние однородным и стационарным

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \rho_0 = 0, \quad P_0 = \text{const}, \quad \mathbf{B}_0 \parallel OZ = \text{const}. \quad (52)$$

Тогда для малых отклонений \mathbf{b} , ρ_1 , \mathbf{v}_1 из (50) и (51) получим систему

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{b} = 0, \quad \text{rot}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0] = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1 - \frac{1}{4\pi\rho_0}[\mathbf{B}_0 \times \text{rot } \mathbf{b}]. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь v_s — скорость изотопического звука, возникающая в идеальной жидкости при возмущении уравнения состояния (51), а именно

$$P_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \rho_1 \equiv v_s^2 \rho_1. \quad (54)$$

Для решений вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ уравнения (53) и (54) сводятся к системе алгебраических уравнений, условие разрешимости которой приводит к следующим дисперсионным соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = k_z^2 v_A^2, \\ \omega_{2,3} = \frac{k^2}{2} \left\{ (v_s^2 + v_A^2) \pm \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4\pi v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 векторами. Первое из этих соотношений описывает частоту поперечную волну (в ней \mathbf{b} и \mathbf{v}_1 осциллируют в плоскости, перпендикулярной векторам \mathbf{B}_0, \mathbf{k}), известную как альфвеновская волна — именно эту волну открыл Х. Альфвен в ионосфере Земли в 1950 г. Два вторых соотношения соответствуют быстрому и медленному звуку (или МГД волнам). Здесь, по существу, проявилось расщепление обычного звука, обусловленное газокинетическим давлением P , на два звука вследствие появления еще и магнитного давления $B_0^2/8\pi$.

Особо простой вид эти два последних спектра принимают в пределе $\beta = v_s^2/v_A^2 = 8\pi P_0/B_0^2 \ll 1$, что как раз и имеет место в ионосфере, где $\beta \approx 10^{-4} \ll 1$:

$$\omega_2^2 = k^2 v_A^2, \quad \omega_3^2 = k_z^2 v_s^2. \quad (56)$$

Здесь как раз и проявляется неоднозначность применения всего выше описанного к ионосфере. Дело в том, что спектры ω_1 и ω_2 , были прекрасно идентифицированы, и это стало безусловным успехом теории Альфвена. Что же касается спектра обычного звука с частотой ω_3 , то здесь проявились уже отмеченные выше трудности. Именно, в идеальном газе скорость изотермического звука $v_s = \sqrt{\gamma T/M}$ где $\gamma = 5/3$ в случае одноатомного газа. В ионосферных измерениях так и не удалось согласовать скорость наблюдаемых звуковых волн с теорией изотермического звука. Тогда вообще встал вопрос: а почему наблюдаемые в ионосфере спектры волн с частотами ω_1 и ω_2 , так хорошо согласуются с гидродинамической теорией, справедливой, строго говоря, для проводящей жидкости типа ртути?

Первая попытка вывода уравнений одножидкостной гидродинамики была предпринята исходя из системы уравнений двухжидкостной гидродинамики (33), приведенной в самом начале предыдущего раздела. В середине 1950-х гг. эта система казалась микроскопической и такой вывод представлялся вполне оправданным.

Поскольку гидродинамика описывает низкочастотные и медленные процессы, мы ниже будем считать выполненными неравенства

$$\omega \ll \omega_{Li}, kv_{Te}, \Omega_i, \quad \nu_e \ll \Omega_e, \quad \nu_i \ll \Omega_i \ll \omega_{Li}. \quad (57)$$

Эти неравенства позволяют в первом уравнении (33) левой частью пренебречь и считать плазму квазинейтральной, т. е. $n_e = n_i = n$. В уравнении Максвелла током смещения также можно пренебречь, записав его в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (58)$$

Используя это уравнение и складывая (33), получим уравнение движения ионов плазмы ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}$)

$$Mn \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla [n(T_e + T_i)] - \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}] - Mn\nu_{i0} \mathbf{v}. \quad (59)$$

Кроме того, вторые неравенства(57) позволяют поперечную составляющую электрического поля выразить через магнитное поле

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (60)$$

а поэтому уравнение Максвелла для электрического вихря приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (61)$$

Если ко всему этому добавить уравнение непрерывности для ионов, то окончательно получим следующую систему уравнений магнитной гидродинамики:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{B} \times \mathbf{v}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}] - \nu_{io} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (62)$$

где $\rho = Mn$ — массовая плотность плазмы, а $P = n(T_e + T_i)$ — давление, заменяющее уравнение состояния (51). Кроме этого уравнения состояния, которое в модели двухжидкостной гидродинамики (33) более не уточняется, система (62) отличается от (50) еще наличием силы трения $-\nu_{io}$ трения проводящей жидкости о неподвижный нейтральный компонент плазмы. В одножидкостной гидродинамике этого члена, естественно нет.

Существуют и другие разновидности гидродинамических моделей плазмы с анизотропным давлением, например, (гидродинамика Чу, Гольдбергера и Лоу), множество попыток их вывода по аналогии вывода уравнений для нейтрального газа исхода из уравнений Больцмана. Все они обладают своими недостатками, в особенности, исходящие из уравнений Больцмана, поэтому мы их здесь обсуждать не будем.

Лекция 4.

Кинетика плазмы. I

Кинетическое уравнение Больцмана–Ландау

После того, как мы убедились в том, что система уравнений моментов, или, как говорят, уравнения гидродинамики не вполне однозначны и обладают рядом недостатков при описании динамики плазмы, причем каждая из гидродинамических моделей обладает своими недостатками, настала пора обратиться к кинетическому описанию. Это было понятно уже давно, и еще до второй мировой войны появились первые попытки получить кинетические уравнения для электронов и ионов плазмы.

Кинетическое описание подразумевает вероятностное описание и поэтому вводится n -частичная функция распределения

$$f_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, t), \quad (63)$$

представляющая собой вероятность обнаружения в момент времени t частиц с импульсами $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ в точках $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$ соответственно. Функция (63) хотя содержит полную информацию о системе частиц, но зависит от огромного числа аргументов и потому очень сложна и практически непригодна для описания динамики плазмы.

Вспомним, однако, что плазма— это газ. Первый об этом вспомнили Чэпмен и Коулинг, которые еще в 1930-е гг. в связи с работами И. Ленгмюра первыми попытались описать слабоионизованную плазму кинетически, считая ее газом. Следуя Больцману и понимая, что для электронов и ионов нейтральные атомы с хорошей степенью точности являются шариками с радиусом a , в газовом приближении, когда расстояние между нейтральными частицами намного превосходит радиус взаимодействия a , т. е.

$$\eta = n_n^{1/3} a \ll 1, \quad (64)$$

функцию (63) в нулевом приближении по параметру (64) можно представить как произведение вероятностей

$$f_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n, t) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i, r_i, t). \quad (65)$$

Здесь $f(\mathbf{p}_i, r_i, t)$ — вероятность обнаружения i -й частицы с импульсом \mathbf{p}_i в момент времени t вблизи точки \mathbf{r}_i .

В рассматриваемом приближении взаимодействием частиц между собой полностью пренебрегается, а поэтому функция $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ (индекс i опускаем) сохраняется во времени, или движение полностью детерминировано воздействием внешней силы \mathbf{F} на эту частицу. Это означает, что $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{df(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (66)$$

Здесь $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — по определению скорости, а

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} + m\mathbf{g}, \quad (67)$$

\mathbf{E} и \mathbf{B} внешние электрические и магнитные поля, а \mathbf{g} поле тяжести. Естественно уравнение (66) записывается для каждого сорта заряженных частиц плазмы: электронов и ионов различных сортов (индекс α мы также опускаем).

Еще раз подчеркнем, что Чепмен и Коулинг под \mathbf{F} понимали внешнюю силу, а частицы в приближении (66) считали невзаимодействующими. Учет взаимодействия в первом порядке по параметру (64), согласно Больцману, сводится к появлению правой части уравнения Лиувилля, которая представляет собой парные столкновения частиц:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \equiv \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} \equiv \sum_\beta J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta). \quad (68)$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам частиц, с которыми сталкиваются частицы сорта α . Следуя Больцману в приближении (64) имеем

$$J_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{p}'_\beta d\epsilon'_\beta v_{\alpha\beta} d\sigma_{\alpha\beta} [f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta)] \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}'_\beta) \delta(\epsilon_\alpha + \epsilon_\beta - \epsilon'_\alpha - \epsilon'_\beta). \quad (69)$$

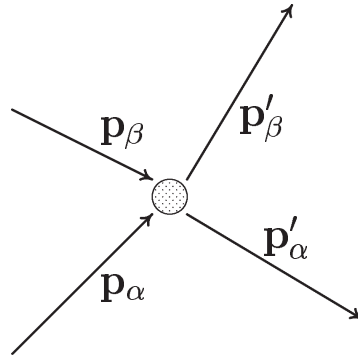


Рис. 2: Процесс рассеяния частиц

В таком виде учитываются только упругие столкновения частиц (рис. 2), при которых выполняются законы сохранения энергии E и импульса \mathbf{p} сталкивающихся частиц. При этом вероятности прямых и обратных процессов рассеяния считаются равными. Эта вероятность равна произведению модуля относительной скорости сталкивающихся частиц $v_{\alpha\beta} = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$ на дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_{\alpha\beta}$. Для упругих столкновений, которыми мы и ограничимся,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{\alpha,\beta} &= \pm\mu_{\alpha,\beta}\mathbf{v}_{\alpha,\beta} + \frac{m_{\alpha,\beta}}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta), \\ \mathbf{p}'_{\alpha,\beta} &= \pm\mu_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}\mathbf{n} + \frac{m_{\alpha,\beta}}{m_\alpha + m_\beta}(\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta),\end{aligned}\tag{70}$$

где $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$, а \mathbf{n} — единичный вектор направления скорости частицы α — после рассеяния в системе центра инерции (в которой $\mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta = 0$).

В случае рассеяния заряженных частиц плазмы на нейтральных атомах, считая последними твердыми шариками с радиусом a , имеем

$$d\sigma_{\alpha\beta} = a^2 d\Omega,\tag{71}$$

где $d\Omega$ — телесный угол. При этом интеграл столкновений (69) больше не упрощается (правда для электрон-нейтральных столкновений имеет место упрощение, связанное с малым отношением масс m/M_n)

Однако при расчете процессов релаксации этот интеграл оказывается достаточно простым. Следующий важный шаг в теории плазмы сделал Л.Д. Ландау, записавший в 1936 г. интеграл столкновений для заряженных частиц между собой. При этом он исходил из уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения (68) с интегралом парных столкновений (69), а для вычисления $d\sigma_{\alpha\beta}$ воспользовался формулой Резерфорда для рассеяния в кулоновском поле

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}}{d\Omega} = \frac{4\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{\mu_{\alpha\beta}^2 v_{\alpha\beta}^4 \sin^4 \theta/2},\tag{72}$$

где θ — угол рассеяния, т. е. угол поворота частицы α по отношению к частице β после рассеяния. Значительно позже, в 1949 г., этот упрощенный подход Ландау получил обоснование в работах Н.Н. Боголюбова.

При кулоновском взаимодействии частиц интеграл Больцмана можно упростить. Ландау заметил, что в среднем выполняются условия

$$|\mathbf{p}'_{\alpha,\beta} - \mathbf{p}_{\alpha,\beta}| \ll p_\alpha, p_\beta,\tag{73}$$

т. е. при рассеянии происходит малое изменение импульса (рассеяние происходит на малые углы), что не имеет места в условиях рассеяния на твердых шариках.

Это позволило провести разложение в (69) по малым изменениям импульса. Во-вторых, известно, что формула (72) приводит к расходимости полного сечения рассеяния при интегрировании по углам θ на малых углах рассеяния. Это проявилось в расходимости при интегрировании (69) по передаваемым при рассеянии импульсам. Ландау правильно понял, что это является следствием неприменимости чисто кулоновского потенциала взаимодействия на больших расстояниях, а следовательно, неприменимости и формулы (72). Эту расходимость он устранил, обрезав взаимодействие при $r = r_D$. Но этого оказалось недостаточно. Дело в том, что разложение по малой передаче импульса в среднем эквивалентно требованию применимости теории возмущений, или борновского приближения. Это означает, что не только $e^2/r_{av} = e^2 n_{e,i}^{1/3} \ll T_{e,i}$, но и

$$\frac{e^2}{r_{min}} \ll T_{e,i}. \quad (74)$$

Поэтому Ландау устранил и расходимость на малых расстояниях, положив $r_{min} = T_e/e^2$. Все эти неточности не очень существенны, поскольку расходимости оказались логарифмическими и привели к требованию

$$L = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r} = \int_{T/e^2}^{r_D} = \ln \frac{r_D}{r_{min}} = \ln \left(\frac{T_{e,i}}{e^2 n_{e,i}^{1/3}} \right)^3 \gg 1. \quad (75)$$

Величина L — называется кулоновским интегралом.

После несложных вычислений Ландау получил свой знаменитый интеграл столкновений

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L}{u^3} (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} f_\beta - \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} f_\alpha \right], \quad (76)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$.

Уравнение (68) интегралом столкновений (76) называется кинетическим уравнением Ландау–Больцмана для полностью ионизованной плазмы, точнее для плазмы, в которой преобладающую роль играют столкновения заряженных частиц между собой, а столкновениями их с нейтральными частицами можно пренебречь. В общем же случае нужно учитывать как столкновения заряженных частиц между собой, т. е. интеграл Ландау (76), так и их столкновения с нейтральными частицами.

Процессы релаксации импульса и энергии

Приведенные в предыдущем разделе кинетические уравнения как для слабоионизованной плазмы с интегралом столкновений (69), так и для полностью ионизованной плазмы с интегралом столкновений Ландау (76), в левой части в виде

(66) содержат только внешние поля и внешнюю силу (67), что ни в коем случае не подразумевает самосогласования полей. Здесь следует особо подчеркнуть, что правые части этих уравнений, именуемые нами интегралами столкновений, получены исходя из интеграла Больцмана, и поэтому очевидным образом их решением в отсутствие внешней силы является термодинамически равновесные распределения Максвелла

$$f_{0\alpha} = \frac{n_{0\alpha}}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha}}. \quad (77)$$

Полное термодинамическое равновесие подразумевает, что пространственные распределения плотностей и температур однородны и, более того, плазма нейтральна и температуры всех частиц равны между собой

$$T_e = T_i = T_n = T, \quad \sum_\alpha e_\alpha n_{0\alpha} = 0. \quad (78)$$

Только в этом случае как левая, так и правая части кинетического уравнения (68) строго обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь малое отклонение от равновесия и вычислим время возврата системы в равновесное состояние, т. е. время релаксации. Начнем с релаксации импульса. Для этого рассмотрим следующую задачу: пусть в начальный момент времени электронный компонент обладает некоторой малой направленной скоростью $u_0 \ll v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$ и выясним, как будет эта скорость релаксировать, считая для простоты, что вид функции распределения в процессе релаксации не меняется и сохраняет вид

$$f_e = \frac{n_{e0}}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))^2}{2T_e} \right\}. \quad (79)$$

Заметим, что такое предположение, строго говоря, неверно. Оно качественно, с точностью до коэффициента порядка единицы, правильно описывает процесс. Подставляя функцию (79) в левую и правую части уравнения (68) после несложных вычислений получим ответ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu_e u, \quad (80)$$

$$\nu_e = \begin{cases} \nu_{en} = \pi a^2 v_{Te} n_{0n}, & \text{слабая ионизация,} \\ \nu_{\text{eff}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 n_{0i} L}{T_e^{3/2}}, & \text{полная ионизация.} \end{cases}$$

Здесь ν_{en} называется частотой столкновений электронов с нейтральными частицами, а ν_{eff} — эффективная частота электрон-ионных столкновений. В случае слабоионизованной плазмы полученный ответ точен и приближенность его обусловлена только приближенностью модели твердых шариков. Что касается пол-

ностью ионизованной плазмы, то приближенность проявляется уже в предположении сохранения вида (79) в процессе релаксации. Фактически мы пренебрегли электрон-электронными столкновениями, которые при таком предположении не дают вклада в релаксацию скорости $u(t)$. Такое приближение принято называть лоренцовским, а плазму — лоренцовским газом. Заметим, что из (80) следует закон релаксации

$$u(t) = u_0 e^{-\nu_e t}. \quad (81)$$

Таким образом $\tau_u = 1/\nu_e$ представляет собой время релаксации импульса в плазме.

Рассмотрим теперь релаксацию энергии. Для этого предположим, что в начальный момент времени температура электронов T_{e0} не совпадает с температурой нейтрального газа (в случае слабоионизованной плазмы) либо ионов (в случае полностью ионизованной плазмы). В этой задаче мы считаем, что распределения частиц в процессе релаксации остаются максвелловскими:

$$f_\alpha = \frac{n_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-m_\alpha v^2/2T_\alpha(t)}. \quad (82)$$

Подставляя (82) в уравнение (68) для электронов и ионов после несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T_e - T_n)}{\partial t} &= -\nu_{en} \frac{2m}{M_n} (T_e - T_n), \\ \frac{\partial(T_e - T_i)}{\partial t} &= -\nu_{\text{eff}} \frac{2m}{M_i} \left(1 + \left|\frac{e_i}{e}\right|\right) (T_e - T_i). \end{aligned} \quad (83)$$

При выводе этих соотношений в случае слабоионизованной плазмы температуру нейтралов T_n мы, естественно, считали постоянной (теплоемкость нейтрального компонента намного больше из-за их большей концентрации). Что касается полностью ионизованной плазмы необходимо учитывать изменение и температуры ионов, поскольку согласно закону сохранения энергии очевидно

$$\frac{\partial(T_e + T_i)}{\partial t} = 0. \quad (84)$$

Из (83) следует экспоненциальная во времени релаксации разность температур, причем $\tau_e \approx \frac{1}{2} \frac{M}{m} \tau_u$, т. е. релаксации энергии происходит в M/m раз медленнее, чем релаксация импульса. Важно отметить, что формулы (83) являются точными.

Выше мы говорили о приближенности описания релаксации импульса в полностью ионизованной плазме с помощью (80), использующего предположения о сохранении вида максвелловского распределения (79). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим поведение плазмы в слабом внешнем электрическом поле.

Начнем именно со случая полностью ионизованной плазмы. Уравнение Ландау–Больцмана (68) позволяет это сделать. Имеем

$$\frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{\beta} \int d\mathbf{p}_{\beta} \frac{2\pi e_{\alpha}^2 e_{\beta}^2 L}{u^3} (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \left[f_{\beta} \frac{\partial f_e}{\partial p_j} - f_e \frac{\partial f_{\beta}}{\partial p_{\beta j}} \right]. \quad (85)$$

Внешнее поле \mathbf{E}_0 считаем достаточно слабым так, чтобы приобретаемая электронами скорость дрейфа была мала по сравнению с их тепловой скоростью. Тогда можно записать $f_e = f_{0e} + \delta f_e$, где f_{0e} — максвелловское распределение и δf_e — малая поправка. Что касается распределения f_i , то из-за большой массы ионов его мы считаем невозмущенным максвелловским распределением. Линеаризуя (85) по δf_e и представив в виде разложения по полиномам Сонина

$$\delta f_e = \frac{(\mathbf{v}\mathbf{E}_0)}{E} \left[a_0 + a_1 \left(\frac{5}{2} - \frac{v^2}{2v_{Te}^2} \right) \right] f_{0e}. \quad (86)$$

Для коэффициентов разложения a_0 и a_1 при подстановке (86) в (85) получаем алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{eE_0}{T_e} &= -\nu_{\text{eff}} \left(a_0 + \frac{3}{2} a_1 \right), \\ \frac{3}{2} a_0 + \frac{13 + 4\sqrt{2}}{4} a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (87)$$

При получении этих соотношений было принято, что $e_i = -e$, т. е. ионы считались однозарядными. Решая (87) и определяя, тем самым, δf_e , окончательно находим ток

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{p} = 1,96 \frac{e^2 n_{0e}}{m\nu_{\text{eff}}} \mathbf{E}_0 = \sigma \mathbf{E}_0. \quad (88)$$

Таким образом, проводимость плазмы равна

$$\sigma = 1,96 \frac{e^2 n_{0e}}{m\nu_{\text{eff}}}. \quad (89)$$

Заметим, что коэффициент 1,96 здесь возник из-за учета электрон-электронных столкновений. Именно, в этом проявляется неточность лоренцовского приближения, использованного выше при исследовании релаксации импульса в полностью ионизованной плазме. Заметим здесь же, что этот численный множитель все больше приближается к 1 с ростом зарядового числа ионов $Z = \left| \frac{e_i}{e} \right|$ и при $Z \geq 1$ он практически совпадает с 1. Таким образом, при больших Z полностью ионизованную плазму с хорошей степенью точности можно считать лоренцовским газом.

Что касается слабоионизованного газа в слабом электрическом поле, то из уравнения (68) после аналогичных процедур получаем

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{p} = \frac{e^2 n_{0e}}{m\nu_{en}} \mathbf{E}_0 = \sigma \mathbf{E}_0. \quad (90)$$

Иными словами, проводимость такой плазмы

$$\sigma = \frac{e^2 n_{0e}}{m \nu_{en}}, \quad (91)$$

т. е. полностью определяется столкновениями электронов с нейтральными частицами.

Лекция 5. Кинетика плазмы. II

Уравнения Власова и Власова–Максвелла

Выше мы неоднократно подчеркивали, что в уравнениях Больцмана для слабоионизованного газа и в уравнениях Больцмана–Ландау для полностью ионизованной плазмы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} считаются внешними. Этим и объясняется то обстоятельство, что при исследовании процессов релаксации импульса и энергии мы полностью пренебрегали изменением поля. Как результат, для процессов релаксации были получены аperiодические во времени зависимости с характерными временами, определяющимися частотами столкновений заряженных частиц.

Первым на непоследовательность такой позиции обратил внимание А.А. Власов, который в своей работе 1938 г. утверждал, что в плазме в газовом приближении в уравнение Лиувилля (66) нужно поля \mathbf{E} и \mathbf{B} считать не только внешними, а полными, т. е. учитывать поля, возникающие в плазме под действием индуцированных зарядов и токов

$$\rho = \sum \int f d\mathbf{p}, \quad \mathbf{j} = \sum \int \mathbf{v} f d\mathbf{p}. \quad (92)$$

Здесь суммирование распространяется по всем сортам заряженных частиц плазмы. В результате будет учтено взаимодействие частиц с полями, создаваемыми всеми частицами, и это уравнение уже будет не нулевого порядка по параметру взаимодействия (64), а первого. Поэтому уравнение (разумеется, для электронов и ионов) имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (93)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} полные поля, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла, содержащим как внешние источники ρ_0 и \mathbf{j}_0 , так и индуцированные в плазме источники ρ и \mathbf{j} (92). Таким образом, (93) дополняется уравнениями поля

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \sum e \int f d\mathbf{p} + 4\pi \rho_0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum e \int \mathbf{v} f d\mathbf{p} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0. \end{aligned} \quad (94)$$

Уравнение (93) принято называть кинетическим уравнением Власова, а всю систему (93) и (94) — уравнениями Власова–Максвелла, или системой уравнений

динамики плазмы с самосогласованным взаимодействием или самосогласованным полем¹.

Первоначально А. А. Власов предполагал, что система (93) и (94) полностью описывает динамику плазмы, причем учитывает взаимодействие частиц между собой через самосогласованные поля. Высшие приближения по параметру (69) дают лишь малые поправки. Это мнение А.А. Власова, которое в чем-то верно, а в чем-то ошибочно (мы этот вопрос подробнее обсудим позднее), стало предметом дискуссии в физике, и поэтому, отдавая дань истории, вкратце воспроизведем его.

Следуя А.А. Власову, рассмотрим малое отклонение функции распределения электронов от равновесного и однородного стационарного распределения Максвелла

$$f_e = f_{0e} + \delta f_e. \quad (95)$$

Однородное стационарное распределение Максвелла f_{0e} удовлетворяет уравнению (93), если поля $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$. Это условие выполняется, если в плазме отсутствуют внешние источники поля, т.е. $\rho_0 = 0$ и $\mathbf{j}_0 = 0$, и плазма квазинейтральна, т.е. $\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} = 0$. Малое же отклонение δf_e (ионы считаем невозмущенными) в отсутствие внешних полей, согласно (93), удовлетворяет линеаризованному уравнению Власова

$$\frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (96)$$

где \mathbf{E} определяется уравнениями поля (94). Мы будем предполагать, что поле \mathbf{E} потенциально (ниже будет показано, когда это действительно так), т.е. $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ и запишем (94) для Φ в виде

$$\Delta \Phi = -4\pi e \int \delta f_e d\mathbf{p}. \quad (97)$$

Уравнения (96) и (97) образуют замкнутую линейную систему уравнений, позволяющую решить задачу временного развития любого начального возмущения $\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Предположим, что начальное возмущение можно представить в виде

$$\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \delta f(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (98)$$

Заметим, что при этом не нарушается общность рассмотрения, поскольку любое возмущение $\delta f_e(0, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ можно представить в виде ряда (или интеграла) Фурье как сумму возмущений типа (98).

¹ Этот термин поясняет преемственность идей А.А. Власова и работ И. Ленгмюра, который еще в 1920-е гг. ввел понятие самосогласованного поля при гидродинамическом описании динамики плазмы.

Теперь мы можем искать решение системы (96) и (97) полагая, что δf_e и \mathbf{E} пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ и найти из условия разрешимости этой системы зависимость $\omega(\mathbf{k})$ — эта величина и будет описывать развитие начального возмущения вида (98) во времени. Из уравнения (96) при этом получаем

$$\delta f_e(\mathbf{v}) = \frac{-ie\mathbf{E}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{k}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}\Phi. \quad (99)$$

Подставляя это выражение в (97) получаем дисперсионное уравнение для определения $\omega(\mathbf{k})$

$$1 - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k}\frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p} = 0. \quad (100)$$

При решении этого уравнения возникли существенные разногласия между А. А. Власовым и Л. Д. Ландау. А. А. Власов еще в 1938 г. считал, что при интегрировании (100) полюс подынтегрального движения нужно понимать в смысле главного значения. При этом он нашел, что в области характерных размеров возмущений, намного превосходящих дебаевский радиус электронов, т. е. $kr_{De} \ll 1$ решение уравнения (100) имеет вид²:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2. \quad (101)$$

Это означает, что малые начальные возмущения такой длины будут осциллировать с частотой (101). Если возмущение содержит не один волновой вектор \mathbf{k} , а целый пакет с $\Delta k \ll k$, то оно будет распространяться с групповой скоростью

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 3 \frac{kv_{Te}}{\omega_{Le}} \ll v_{Te}. \quad (102)$$

А. А. Власов понимал, что во времени возмущения должны затухать. Однако затухания он не находил, отметив, что оно возникает лишь в следующем приближении по взаимодействию частиц, выходящем за рамки уравнения (96). На нашем языке это означает, что уравнение (94) справедливо лишь в бесстолкновительном приближении.

Совершенно иначе подошел к решению уравнения (100) Л. Д. Ландау, анализируя его в 1946 г. в статье, посвященной критике А. А. Власова. Он правильно отметил, что, согласно принципу причинности, полюс в подынтегральном выражении следует обходить сверху, считая

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\mathfrak{P}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (103)$$

² Этот спектр колебаний отличается от спектра (46), найденного И. Ленгмюром коэффициентом 3 вместо 1 в формуле (46), что указывает на неточность гидродинамического описания плазмы, отмеченную в главе 3.

В результате в уравнении появилось мнимое слагаемое, которое и привело к затуханию колебаний со спектром частот (101). Декремент затухания при этом легко находится и равен ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^4}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left\{ -\frac{\omega_{Le}^2}{2k^2 v_{Te}^2} - \frac{3}{2} \right\}. \quad (104)$$

Это и есть знаменитое затухание Ландау, определяющее время релаксации $\tau = 1/\delta$ плазменных колебаний со спектром (101), выведенным А.А. Власовым. Увлечшись критикой, Л.Д. Ландау не заметил противоречие со своей же работой 1936 г., когда он, решая задачу о релаксации импульса (см. предыдущую главу), нашел совсем другую величину, а именно, $1/\nu_e$.

Лишь в 1949 г. все парадоксы были разрешены Н.Н. Боголюбовым, который обосновал как уравнение Больцмана в случае короткодействующих сил и выполнения условия газовой (64), так и уравнения Власова с интегралом столкновений Ландау для полностью ионизованной плазмы в газовом приближении. В некотором смысле А.А. Власов был прав, когда говорил, что его уравнение лишь первое приближение; вторым приближением оказались либо интеграл столкновений Больцмана для слабоионизованной плазмы, либо интеграл Ландау для полностью ионизованной плазмы.

Таким образом, мы теперь можем записать полное кинетическое уравнение для описания динамики заряженных частиц в плазме, обобщающее уравнение Власова (93):

$$\begin{aligned} \frac{df_\alpha}{dt} &= \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \\ &= \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha n} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha e} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha i}. \end{aligned} \quad (105)$$

Здесь $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha n}$ — интеграл столкновений заряженных частиц сорта α со всеми сортами нейтралов, который дается интегралом Больцмана (69) с учетом (71), $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha, e, i}$ — интегралы столкновений Ландау частиц сорта α с электронами и ионами различных сортов.

Самосогласованные же электромагнитные поля, содержащиеся в левой части (184), учитывают взаимодействие частиц сорта α с полями, создаваемыми всеми заряженными частицами плазмы.

Здесь важно отметить, что самосогласованное взаимодействие всегда больше взаимодействия, обусловленного столкновениями заряженных частиц между собой. В этом суть власовского приближения. Однако этого не скажешь о столкновениях заряженных частиц с нейтральными, поскольку интеграл столкновений

Больцмана выводится без всякого учета самосогласованного поля, а поэтому слагаемое в правой части (105) не считается малым по сравнению последним слагаемым в левой части (105).

В заключение, нелишне дать еще одно толкование сказанному. Именно, самосогласованное взаимодействие описывает взаимодействие заряженной частицы с полем, а интеграл столкновений — прямое, контактное взаимодействие частиц между собой. Таким образом, взаимодействие заряженных частиц посредством самосогласованного поля в плазме всегда больше, чем их прямое взаимодействие между собой.

Интеграл столкновений Батнагара–Гросса–Крука

Кинетическое уравнение (105) благодаря его правой части оказывается сложным нелинейным интегральным уравнением, решить которое даже в линеаризованном пределе не очень легко. Поэтому уже давно теоретики научились конструировать более простые модельные интегралы столкновений, которые намного проще анализировать. При этом, однако, надо помнить, что они лишь качественно описывают динамику плазмы.

При конструировании любого модельного интеграла упругих столкновений следует исходить из общих законов сохранения числа частиц данного сорта, импульса сталкивающихся частиц и их энергии. Математически это означает, что должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} &= 0, \\ \int \mathbf{p}_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} d\mathbf{p}_\alpha + \int \mathbf{p}_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\beta\alpha} d\mathbf{p}_\beta &= 0, \\ \int \varepsilon_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} d\mathbf{p}_\alpha + \int \varepsilon_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\beta\alpha} d\mathbf{p}_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (106)$$

Кроме того, вследствие теоремы Больцмана, интеграл столкновений должен обращаться в нуль при подстановке в него равновесных распределений Максвелла для функций распределений сталкивающихся частиц.

Существует множество различных модельных интегралов столкновений. Самым совершенным из них является интеграл Батнагара–Гросса и Крука (БГК), предложивших его в 1954 г. Он имеет вид

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{coll}}^{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}(f_\alpha) = -\nu_{\alpha\beta}(f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha\beta}), \quad (107)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_{\alpha\beta})^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)^2}{2T_{\alpha\beta}}\right\}, \\ \mathbf{v}_\alpha &= \frac{1}{N_\alpha} \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_\alpha, \quad N_\alpha = \int d\mathbf{p} f_\alpha, \\ T_{\alpha\beta} &= \frac{m_\alpha T_\beta + m_\beta T_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, \quad T_\alpha = \frac{m_\alpha}{2N_\alpha} \int d\mathbf{p} f_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\alpha)^2.\end{aligned}\tag{108}$$

Наконец, для выполнения законов сохранения импульса энергии, как легко показать из (106) и (107), необходимо, чтобы

$$m_\alpha N_\alpha \nu_{\alpha\beta} = m_\beta N_\beta \nu_{\beta\alpha}.\tag{109}$$

Физический смысл величин $\nu_{\alpha\beta}$ можно прояснить, рассмотрев с помощью модельного интеграла БГК задачи о релаксации импульса и энергии и сравнив результаты с полученными выше с помощью точных интегралов столкновений Больцмана и Ландау. В результате получим почти очевидные соотношения:

$$\begin{aligned}\nu_{en} &= \pi a^2 v_{Te} n_{0n}, & \nu_{in} &= \pi a^2 v_{Ti} n_{0n}, \\ \nu_{ee} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{e^4 n_{0e} L}{T_e^{3/2}}, & \nu_{ei} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 n_{0i} L}{T_e^{3/2}}, \\ \nu_{ii} &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \frac{e_i^4 n_{0i} L}{T_i^{3/2}}, & \nu_{ie} &= \frac{m}{M} \left| \frac{e_i}{e} \right| \nu_{ei},\end{aligned}\tag{110}$$

которые будут использоваться ниже. При этом следует иметь в виду, что полученные с помощью интеграла БГК результаты являются лишь качественными; количественно они могут быть верны с точностью до множителя порядка единицы. Однако простота интеграла БГК по сравнению с точными является настолько существенной, что ниже мы ограничимся преимущественно его использованием.

Простейшие гидродинамические модели бесстолкновительной плазмы

Система уравнения Власова–Максвелла, описывающая динамику бесстолкновительной плазмы, с одной стороны, учитывает основное взаимодействие частиц посредством самосогласованного поля, но с другой, остается еще достаточно сложной, для анализа — в особенности, когда речь идет о нелинейных явлениях. Это связано с нелинейностью, в первую очередь, самого кинетического уравнения Власова, а также с тем, что функция распределения $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ является функцией сразу трех непрерывных переменных — двух векторных \mathbf{p} и \mathbf{r} и одной скалярной t . Поэтому, естественно, интерес представляет возможность получения замкнутой

системы уравнений для моментов функции распределения, справедливой в ограниченной области, но намного более простой, чем само кинетическое уравнение. Такие замкнутые системы уравнений называются гидродинамическими и, как правило, они ограничиваются следующими моментами:

$$\begin{aligned}
N_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \\
N_\alpha V_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int d\mathbf{p} \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \\
N_\alpha T_\alpha(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{m_\alpha v^2}{2} d\mathbf{p} f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t).
\end{aligned} \tag{111}$$

Ниже мы рассмотрим только две простейшие модели гидродинамики бесстолкновительной плазмы, справедливой соответственно в областях высоких и низких частот. При получении этих уравнений исходим из уравнений Власова для электронов и ионов

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \tag{112}$$

Поскольку мы пренебрегли столкновениями, то мы вправе рассматривать только такие процессы, которые протекают быстрее чем время столкновений, а их характерные размеры меньше длин свободного пробега, т. е.

$$\frac{1}{\tau} \gg \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}, \quad L \ll \frac{v_{T\alpha}}{\sum_\beta \nu_{\alpha\beta}}. \tag{113}$$

Умножим уравнение (112) на 1 и \mathbf{v} и проинтегрируем по импульсам. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \text{div} N_\alpha \mathbf{V}_\alpha &= 0, \\
\frac{\partial N_\alpha \mathbf{V}_{\alpha i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{\alpha ij} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} N_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}] \right\}.
\end{aligned} \tag{114}$$

где

$$\Pi_{\alpha ij} = \int d\mathbf{p} p_i v_j f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \tag{115}$$

Первое уравнение (114) представляет собой уравнение непрерывности. Оно связывает нулевой момент функции распределения с первым и является точным. Второе уравнение связывает первый момент со вторым (115), который следует определить. Продолжая манипуляции с уравнением (112), второй момент можно связать с третьим и т.д. В результате мы получим бесконечную систему уравнений. Необходимо эту процедуру оборвать, остановиться на каком-то моменте и, тем самым, замкнуть цепочку уравнений. Здесь возникают две возможности такого обрыва,

одна из которых реализуется при больших частотах и фазовых скоростях, а другая, напротив, при малых частотах и фазовых скоростях. В случае больших частот и фазовых скоростей

$$\frac{L}{\tau} \sim \frac{\omega}{k} \gg v_{T\alpha}. \quad (116)$$

Поэтому тепловым движением частиц можно полностью пренебречь, считая, что $f_\alpha \sim \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)$. При этом из (115) следует

$$P_{\alpha ij} = N_\alpha V_{\alpha i} V_{\alpha j}. \quad (117)$$

Подстановка этого выражения в (114) приводит к уравнению движения для частиц сорта α

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}] \right\}. \quad (118)$$

Система уравнений непрерывности (114) и движения (118) вместе с уравнениями Максвелла, в которых плотности заряда и тока даются соотношениями

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha N_\alpha, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{V}_\alpha N_\alpha, \quad (119)$$

образуют замкнутую систему уравнений двухжидкостной гидродинамики “холодной” плазмы. Эта система в пределе $\nu_\alpha \rightarrow 0$ совпадает с моделью независимых частиц, успешно примененной для исследования распространения радиоволн в ионосфере В.Л. Гинзбургом. Это нелинейная система, поэтому ее можно использовать для анализа нелинейных явлений, удовлетворяющих условиям (113) и (116).

Второй пример, когда удастся получить замкнутую систему гидродинамических уравнений для описания бесстолкновительной плазмы, это область низких фазовых скоростей, удовлетворяющих условиям

$$v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k} \sim \frac{L}{\tau} \ll v_{Te}. \quad (120)$$

Ионы, как и выше, остаются холодными, поэтому для них справедливы и уравнение непрерывности, и уравнение движения (индекс i опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(N\mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= \frac{e_i}{M} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (121)$$

Что касается электронов, то кинетическое уравнение для них в пределе (120) записывается в виде

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (122)$$

Рассмотрим прежде всего случай, когда внешнее магнитное поле отсутствует, а благодаря медленности изменения процессов во времени (120) электрическое поле можно считать потенциальным, т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$

В этих условиях решение уравнения для электронов (122) пишется сразу

$$f_e = f_e \left[\frac{1}{T_e} \left(\frac{mv^2}{2} + e\Phi \right) \right] = \frac{N_{0e}}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{mv^2}{2T_e} - \frac{e\varphi}{T_e} \right\}. \quad (123)$$

Отсюда следует известное больцмановское распределение для плотности

$$N_e = N_{0e} e^{-e\Phi/T_e}, \quad \frac{\nabla N_e}{N_e} = \frac{e}{T_e} \mathbf{E}. \quad (124)$$

При выводе решения (123) предполагалось температура предполагалась постоянной $T_e = \text{const}$, что также является следствием (120), поскольку это условие соответствует бесконечно большой электронной теплопроводности, мгновенно выравнивающей температуру электронов в плазме.

Теперь мы можем подставить (124) в (121), записав эту систему в замкнутом виде — виде системы уравнений одножидкостной гидродинамики (с учетом $eN_e = |e_i|N_i$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div } N\mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= - \left| \frac{e_i}{e} \right| \frac{\nabla NT_e}{MN}. \end{aligned} \quad (125)$$

Поскольку здесь $T_e = \text{const}$, то в уравнении для P нет нужды, и эта система описывает ионную жидкость с электронной температурой в изотермическом приближении, причем очевидно ее можно применять только в случае неизотермической плазмы $T_e \gg T_i$, а поэтому $P = NT_e$.

При наличии внешнего магнитного поля (и учете индуцированного) из (122) с дополнительным условием

$$kv_{T\alpha} \sim \frac{v_{T\alpha}}{L} \ll \Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B}{m_\alpha c}. \quad (126)$$

легко получаем систему одножидкостной МГД, которая обобщает (125) и которая совпадает с альфвеновской гидродинамикой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div } N\mathbf{V} &= 0, \quad P = NT_e, \quad \rho_m = NM, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} &= - \left| \frac{e_i}{e} \right| \frac{\nabla NT_e}{NM} + \frac{1}{4\pi NM} [\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}[\mathbf{B} \times \mathbf{V}] &= 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (127)$$

Таким образом, альфвеновская магнитная гидродинамика получила обоснование для бесстолкновительной неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$ и поэтому не удивительно ее хорошее согласие с ионосферными экспериментами. Отметим, что это обоснование было дано лишь в 1956 г. В. П. Силиным и Ю. Л. Климонтвичем.

В заключение еще раз подчеркнем, что мы ограничились лишь самыми простыми моделями гидродинамического описания бесстолкновительной плазмы в высокочастотном и низкочастотном пределах. Существует еще множество других гидродинамических моделей — модель Чу–Гольдбергера–Лоу, электронная МГД и другие, каждая из которых имеет свою область применимости.

Лекция 6.

Электродинамика изотропной плазмы

Линейные электромагнитные свойства бесстолкновительной изотропной равновесной плазмы

Приступая к строгому кинетическому рассмотрению линейных электромагнитных свойств плазмы, мы прежде всего обсудим свойства бесстолкновительной изотропной плазмы в отсутствии внешних полей. Как мы уже знаем, она описывается уравнением Власова для электронов и ионов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (128)$$

В первую очередь определяем равновесную функцию, которая должна быть однородной и стационарной и удовлетворять уравнению (128) в отсутствие внешних полей. Нужным распределением является

$$f_0 = \frac{n_0}{(2\pi m T)^{3/2}} e^{-mv^2/2T}, \quad (129)$$

причем условие отсутствия полей требует

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} = e n_{0e} + e_i n_{0i} = 0. \quad (130)$$

Малое отклонение δf вызывает появление малых полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , поэтому линеаризованное уравнение (128) запишется в виде

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f = -\frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (131)$$

Здесь мы учли, что в линейном случае δf и поля \mathbf{E} и \mathbf{B} зависят от времени и координат в виде $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Решение δf уравнения (131) имеет вид

$$\delta f = -\frac{ie\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (132)$$

Подставляя (132) в формулу для тока, находим проводимость, а затем и диэлектрическую проницаемость, которая для равновесной функции (129) приводит к следующему ответу

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, k) = \\ &= \delta_{ij} + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_j}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (133)$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \\
&= 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2} J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right), \\
\varepsilon^l(\omega, k) &= 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{v})^2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \\
&= 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_T} \right) \right].
\end{aligned} \tag{134}$$

Здесь полюс в подынтегральных выражениях, как уже говорилось выше, надо понимать так:

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\mathfrak{P}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \tag{135}$$

Функция же $J_+(x)$ равна

$$\begin{aligned}
J_+(x) &= x e^{-x^2/2} \int_{i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2} = \\
&= \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \dots - e^{-x^2/2}, & |x| \gg 1, \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}x + x^2, & |x| \ll 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{136}$$

В первую очередь рассмотрим предельные случаи (134) при $\omega \rightarrow 0$. Имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon^l(0, k) &= 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \\
\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) &= 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 + i \frac{4\pi \sigma^{\text{tr}}(0, k)}{\omega}.
\end{aligned} \tag{137}$$

Видно, что $\varepsilon^l(0, k)$ соответствует дебаевской экранировке поля статистического заряда, что и следовало ожидать, поскольку при выводе дебаевского потенциала выше мы никаких ограничений на частоту столкновений не накладывали и единственное, из чего мы исходили, было распределение Больцмана, которое содержится в максвелловском распределении (129) при наличии потенциального поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

Более интересным и новым является выражение $\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k)$. Из (137) видно, что в низкочастотном пределе проводимость плазмы $\sigma^{\text{tr}}(0, k)$ оказывается функцией вида $\sim 1/k$, что соответствует нелокальной интегральной связи между током \mathbf{j} и полем \mathbf{E} или связи типа

$$\text{rot } \mathbf{j} = -\frac{\omega_{Le}^2}{4\pi v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{E} = -\beta \mathbf{E}. \tag{138}$$

что напоминает лондоновскую электродинамику. Отметим также, что формула для $\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k)$ (137) приводит при подстановке в уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (139)$$

к следующему уравнению диффузии поперечного поля в плазму

$$\text{rot rot rot } \mathbf{B} = \frac{\omega_{Le}^2}{4\pi v_{Te}} \frac{4\pi}{c^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (140)$$

или для зависимости вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ к уравнению

$$k^3 = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{c^2 v_{Te}} \quad (141)$$

Это соответствует скинированию внешнего поля с глубиной скин-слоя

$$\delta = (\text{Im } k)^{-1} \approx \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\omega_{Le} \omega} \right)^{1/3}. \quad (142)$$

Такой скин-эффект в физике металлов известен, как аномальный.

Рассмотрим теперь решения уравнений Максвелла в плазме с диэлектрической проницаемостью (133) при произвольных частотах. Уравнения Максвелла для решений вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$

$$\left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right\} E_j = 0, \quad (143)$$

при подстановке (133) принимают вид

$$\begin{aligned} E^l \varepsilon^l(\omega, k) &= 0, \\ E^{\text{tr}} [k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)]^2 &= 0, \end{aligned} \quad (144)$$

Первое уравнение описывает продольное поле с $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, и условие существования нетривиальных решений этого уравнения

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 0, \quad (145)$$

представляет собой дисперсионное уравнение продольных волн. Второе же уравнение (145) описывает поперечное поле, и уравнение

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) = 0, \quad (146)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для поперечных волн, которые в изотропной плазме оказываются дважды вырожденными.

Кратко проанализируем спектры продольных и поперечных волн, подставляя в (145) и (148) выражения (133). В общем случае эти уравнения трансцендентны

и обладают бесконечным множеством корней. Однако интерес представляют, в основном, корни, соответствующие колебаниям, когда $\text{Re } \omega \gg \text{Im } \omega$

Начнем с продольных волн.

а) В области частот $\omega \gg kv_{Te}, kv_{Ti}$ существуют быстрые высокочастотные волны. В этой области

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\omega^2/2k^2 v_{Te}^2}, \quad (147)$$

В результате, из (145) находим спектр таких волн $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ справедливый для $k^2 r_{De}^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \\ \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp \left\{ -\frac{1}{2k^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (148)$$

Выше этот спектр, соответствующий плазменным колебаниям, которые затухают благодаря вынужденному черенковскому поглощению волн электронами плазмы (затухание Ландау), мы уже проанализировали. Добавим только, что с ростом волнового числа k затухание Ландау экспоненциально растет, и при $kr_{De} \sim 1$ декремент затухания становится порядка частоты колебаний. В этом пределе поправка к ленгмюровской частоте в (148) становится уже не поправкой, а главным членом и формулы (148) теряют смысл. Заметим также, что эта поправка отличается от поправки, полученной в модели двухжидкостной гидродинамики множителем 3 вместо 1. Если же поправкой пренебречь, то спектр (148) соответствует модели независимых частиц, естественно, без учета затухания Ландау.

б) В области промежуточных фазовых скоростей, когда $kv_{Ti} \ll \omega kv_{Te}$ имеем

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right). \quad (149)$$

При подстановке этого выражения в уравнение (145) находим спектр $\omega \rightarrow \omega + i\delta$.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2} = \begin{cases} k^2 v_s^2, & \text{при } k^2 r_{De}^2 \ll 1, \\ \omega_{Li}^2, & \text{при } k^2 r_{De}^2 \gg 1, \end{cases} \\ \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} z \frac{m}{M} \omega \ll \omega. \end{aligned} \quad (150)$$

Наибольший интерес представляет длинноволновый предел этого спектра, когда $k^2 r_{De}^2 \ll 1$:

$$\omega = kv_s, \quad \delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} z \omega. \quad (151)$$

Рассмотренные волны со спектром (150) и (151) называются ионно-звуковыми колебаниями, и они могут существовать только в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$.

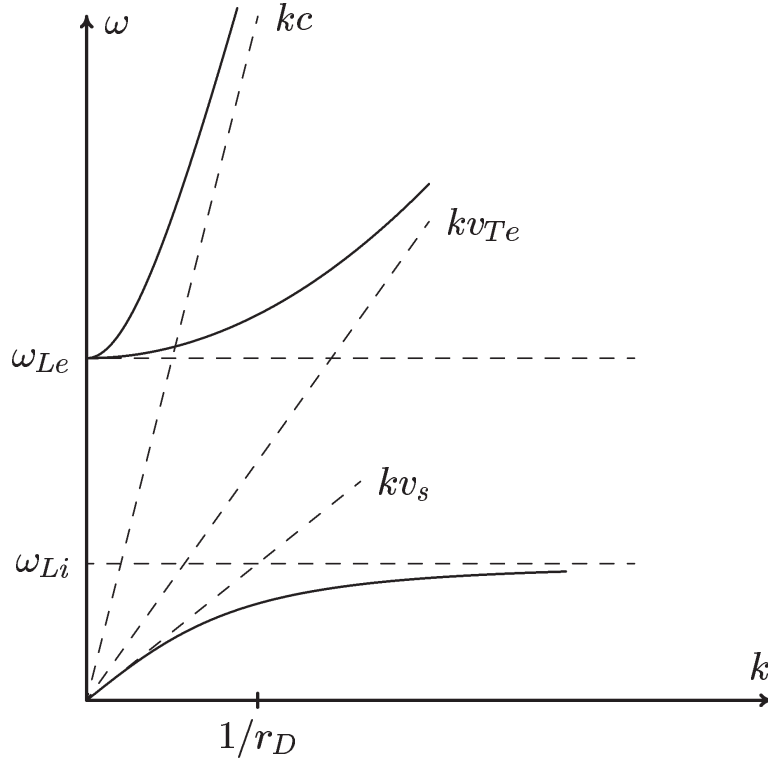


Рис. 3: Спектры колебаний изотропной плазмы

Кстати сейчас становится понятным, что рассмотренная выше модель одножидкостной гидродинамики требует выполнения условия $T_e \gg T_i$ и объясняет, почему звук (151) является изотермическим — за время колебаний электроны успевают выровнять температуру плазмы, поскольку $\omega \ll kv_{Te}$. Кроме того, эта модель очевидно, не учитывает бесстолкновительное затухание, обусловленное черенковским поглощением ионно-звуковых волн электронами плазмы. Спектры (148) и (150) представлены на рис. 3.

в) Наконец заметим, что в области самых низких частот, как уже было показано выше, справедлива формула (137), и имеет место дебаевская экранировка продольного поля в плазме.

Рассмотрим теперь поперечные электромагнитные волны, описываемые уравнением (144). Здесь есть только два предельных случая

а) $\omega \gg kv_{Te}$, когда справедливо выражение

$$\varepsilon^{\text{tr}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \quad (152)$$

и из (147) находим спектр

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2. \quad (153)$$

Этот спектр представлен на рис. 3 верхней кривой. Заметим, что фазовая скорость поперечных волн согласно (153) больше скорости света, и поэтому в рассматрива-

емом бесстолкновительном приближении они оказались незатухающими. Черенковское излучение и поглощение таких волн частицами плазмы не происходит. Именно поэтому этот спектр в точности совпадает с полученным в модели независимых частиц.

б) Если же $\omega \ll kv_{Te}$, то мы приходим к формуле (137) для $\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k)$, что, как мы уже знаем, описывает аномальный скин-эффект, или диффузию низкочастотного поперечного поля в плазму.

Роль столкновений частиц в изотропной плазме

Переходя к учету столкновений мы в основном ограничимся слабоионизованной плазмой с использованием модельного интеграла ВГК и лишь в отдельных случаях приведем результаты, которые получаются с помощью интеграла, для полностью ионизованной плазмы Ландау, когда модельный интеграл неприменим. Более того, мы ограничимся использованием интеграла ВГК в изотермическом приближении, считая $T_\alpha = \text{const}$, а массы ионов и нейтральных частиц равными. Уравнение Власова с таким интегралом столкновений записывается в виде

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{\alpha n} (f_\alpha - N_\alpha \Phi_{\alpha n}), \quad (154)$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha v^2}{2T_\alpha} \right\}. \quad (155)$$

Интеграл столкновений обращается в нуль для равновесного максвелловского распределения $f_{0\alpha} = N_{0\alpha} \Phi_{\alpha n}$. Вводя малое отклонение функции распределения $f_\alpha = f_{0\alpha} + \delta f_\alpha$, где $\delta f_\alpha \sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и линеаризуя уравнения (154) по δf_α , получим интегральное уравнение типа Вольтера

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = -\nu_{\alpha n} (\delta f_\alpha - \Phi_{\alpha n} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha), \quad (156)$$

которое легко решается при учете уравнения непрерывности

$$\omega e_\alpha \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha = \mathbf{k}\mathbf{j}_\alpha = e_\alpha \int \mathbf{k}\mathbf{v} \delta f_\alpha d\mathbf{p}. \quad (157)$$

Окончательно находим продольную и поперечную диэлектрические проницаемости изотропной плазмы с учетом столкновений:

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 - J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right)}{1 - \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n}} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right)}, \quad (158)$$

$$\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha n})} J_+ \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{kv_{T\alpha}} \right), \quad (159)$$

Как и следовало ожидать, в пределе $\nu_{\alpha n} \rightarrow 0$ эти выражения совпадают с формулами (134), полученными для бесстолкновительной плазмы.

Как и выше, прежде всего проанализируем выражения (158) в пределе низких частот, соответствующих статическому пределу $\omega \ll \nu_{\alpha n}$ независимо от соотношения между $\nu_{\alpha n}$ и kv_{Te} , т. е. длины свободного пробега частиц и размера неоднородности поля. Из (158) следует

$$\varepsilon^l(0, k) = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (160)$$

Таким образом в статическом пределе в столкновительной плазме, так же как и в бесстолкновительной, имеет место дебаевская экранировка продольного поля (т. е. поля статистического заряда). Подчеркнем, что этого и следовало ожидать, поскольку выше при первом выводе дебаевской экранировки поля статического заряда в плазме (5),(6) мы никаких ограничений кроме $\omega \rightarrow 0$ на другие параметры плазмы не накладывали.

Несколько иное положение имеет место для поперечной диэлектрической проницаемости. Из формулы (159) следует, что для появления аномального скин-эффекта недостаточно требования $\omega \ll kv_{Te}$ необходимо также выполнение требования $\nu_e \ll kv_{Te}$. Только одновременное выполнение этих неравенств приводит к выражению (137)

$$\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) = 1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}}{\omega kv_{Te}}, \quad (161)$$

отвечающему аномальному скин-эффекту с глубиной скин-слоя (142). Выполнение указанных выше условий приводит к следующим неравенствам

$$\nu_e^3 \ll \omega \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2 \ll \frac{v_{Te}^3}{c^3} \omega_{Le}^2. \quad (162)$$

При нарушении любого из этих неравенств аномальный скин-эффект, существующий при $\omega \gg \nu_e$, становится невозможным. Иными словами аномальный скин-эффект возможен при $\omega \gg \nu_e$, если

$$\omega^2 \ll \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2, \quad (163)$$

либо при $\nu_e \gg \omega$, если

$$\nu_e^2 \ll \frac{v_{Te}^2}{c^2} \omega_{Le}^2. \quad (164)$$

Если же последнее неравенство меняет знак, то при $\omega \ll \nu_e$ имеет место только обычный скин-эффект, описываемый диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k) = 1 + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_{en}} = 1 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}. \quad (165)$$

Заметим, что в случае полностью ионизованной плазмы в формуле (165) следует заменить $\nu_{en} \rightarrow \nu_{\text{eff}}/1,96$ при ($e_i = -e$).

Перейдем теперь к рассмотрению собственных колебаний и волн в изотропной плазме с учетом столкновений. Как и выше, начнем с продольных колебаний, описываемых первым уравнением (144).

а) В области высоких частот, когда $\omega \sim \omega_{Le} \gg kv_{Te}, \nu_{en}$ из (158) получаем выражение (148) с поправкой

$$\Delta\epsilon^l = i \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{en}}{\omega^3}. \quad (166)$$

Оно приводит к поправке к затуханию Ландау (148)

$$\Delta\delta = -\frac{\nu_{en}}{2}. \quad (167)$$

Найденная поправка позволяет определить, когда можно столкновениями полностью пренебречь, и с помощью уравнения Власова количественно правильно описать не только спектр частот, но и затухание (с помощью формулы (148)). Для этого поправку (167) нужно сравнить с (148). Получаем, что если длина волны удовлетворяет условию

$$\frac{1}{k^3 r_{De}^3} e^{-1/(2k^2 r_D^2)} \gg \sqrt{\frac{30}{\pi}} \frac{\nu_e}{\omega_{Le}}, \quad (168)$$

то столкновениями можно пренебречь. В противном случае столкновительное затухание преобладает над затуханием Ландау.

Имеет смысл здесь также обсудить при каких условиях плазму можно считать слабоионизованной, а когда, напротив, ее следует считать полностью ионизованной. Очевидно в рассматриваемом случае высокочастотных продольных волн это определяется отношением (здесь T_e — в градусах)

$$\frac{\nu_{en}}{\nu_{\text{eff}}} \approx \frac{n_n}{n_e} \frac{10^5 a^2 T_e^2}{2zL}. \quad (169)$$

Если это отношение больше единицы, то плазма слабоионизована, а если оно меньше единицы, то полностью ионизована. При $a \sim 10^{-8}$ см и $T_e \approx 10^5$ К, $Z \approx 1$ и $L \approx 10$, отсюда следует, что уже при $\frac{n_n}{n_e} > 10^{-2}$ плазму следует считать сильноионизованной. Для почти термоядерной плазмы с $T_e \approx 10^7$ К напротив, при очень малой примеси нейтралов $\frac{n_n}{n_e} > 10^{-2}$ плазму следует рассматривать как слабоионизованную.

б) Рассмотрим теперь влияние столкновений частиц на ионно-звуковые колебания. При учете столкновений кроме условия $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ необходимо потребовать выполнение неравенств $\nu_i \ll \omega$ и $\nu_e \gg kv_{Te}$. В этих условиях из (158)

получаем выражение, которое отличается от (149) появлением столкновительной добавки

$$\Delta\varepsilon^l = i \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \begin{cases} \frac{\nu_{in}}{\omega} & \text{для слабоионизованной плазмы,} \\ \frac{8}{5} \frac{\nu_{ii} k^2 v_{Ti}^2}{\omega^3} & \text{для сильноионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (170)$$

В результате появляется столкновительная поправка к декременту затухания (150)

$$\Delta\delta = - \begin{cases} \frac{\nu_{in}}{2} & \text{для слабоионизованной плазмы,} \\ \frac{4}{5} \frac{\nu_{ii} T_i}{z T_e} & \text{для сильноионизованной плазмы.} \end{cases} \quad (171)$$

Отсюда сразу же следует, что если

$$\frac{\nu_i}{\omega} > \sqrt{z \frac{m}{M}}, \quad (172)$$

$$\nu_i = \begin{cases} \nu_{in} & \text{для слабоионизованной плазмы,} \\ \nu_{ii} \frac{T_i}{T_e} & \text{для сильноионизованной плазмы,} \end{cases}$$

то столкновительное поглощение ионно-звуковых волн преобладает над черенковским; в обратном же случае преобладающим оказывается бесстолкновительное затухание, обусловленное черенковским поглощением волн электронами плазмы.

Наконец заметим, что в слабоионизованной столкновительной плазме возможно существование ионно-звуковых колебаний не только при $k\nu_{Te} \gg \nu_e$, но и при $\nu_{en} \gg k\nu_{Te}$. В этом легко убедиться, записав выражение (159) для $\varepsilon^l(\omega, k)$ в пределе $|\omega + i\nu_{\alpha n}| \gg k^2 v_{T\alpha}^2$

$$\varepsilon^l = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha n}) \left[\omega - i\nu_{\alpha n} \frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega + i\nu_{\alpha n}} \right]}. \quad (173)$$

Отсюда в условиях $\omega \gg \nu_{in}$, $k\nu_{Ti}$ и $\nu_{en} \gg \omega$, $k\nu_{Te}$, но $\omega\nu_{en} \ll k^2 v_{Te}^2$ что соответствует сильной электронной диффузии, имеем

$$\varepsilon^l = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \frac{\omega\nu_{en}}{k^2 v_{Te}^2} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left(1 + i \frac{\nu_{en}}{\omega} \right). \quad (174)$$

Действительная часть этого выражения полностью совпадает с действительной частью (150), которая, как было показано в предыдущем разделе, определяет спектр частот ионно-звуковых волн в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Мнимая же часть является малой и определяется электронной диффузией и ионным

трением, что приводит к декременту затухания волн с частотным спектром (150)

$$\omega \rightarrow \omega + i\delta$$

$$\frac{\delta}{\omega} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega\nu_{en}}{k^2 v_{Te}^2} + \nu_{in} \right). \quad (175)$$

Отметим здесь же, что из (173) в пределе частых столкновений как электронов, так и ионов, получаем

$$\varepsilon^l = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{i\omega\nu_{\alpha n} - k^2 v_{T\alpha}^2}. \quad (176)$$

Это выражение уже встречалось во второй главе, когда мы исследовали двухжидкостную гидродинамику и в низкочастотном пределе исследовали моно- и амбиполярную диффузии слабоионизованной плазмы. Таким образом, эта модель получила обоснование в низкочастотном пределе.

В заключение осталось рассмотреть вопрос о роли столкновений частиц в затухании поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме. В предыдущем разделе было показано, что в бесстолкновительном пределе такие волны, обладая сверхсветовой фазовой скоростью, вообще не поглощаются в плазме, поэтому поглощение может возникнуть только благодаря столкновениям. Обратимся вновь к выражению (159). Оно уже было исследовано в низкочастотном пределе, в котором поперечное поле оказывается скинированным. Выше мы выяснили, в каких условиях скинирование носит нормальный характер, а в каких — аномальный.

Рассмотрим теперь высокочастотный предел, когда $\omega \gg kv_{Te}, \nu_e$. В этом пределе из (159) следует

$$\varepsilon^{\text{tr}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_{en}}{\omega} \right). \quad (177)$$

Подстановка этого выражения в дисперсионное уравнение поперечных волн

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon^{\text{tr}}(\omega), \quad (178)$$

приводит к спектру, который уже был нами получен еще в первой главе в модели независимых частиц

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Le}^2, \quad \delta = -\frac{\omega_{Le}^2 \nu_{en}}{\omega_{Le}^2 + k^2 c^2}. \quad (179)$$

В случае сильноионизованной плазмы ν_{en} следует заменить на ν_{eff} . Условие слабой и сильной ионизации плазмы при этом определяется отношением (169), исследованным выше.

Лекция 7.

Электродинамика анизотропной плазмы

Линейные электромагнитные явления в бесстолкновительной равновесной магнитоактивной плазме

Плазма во внешнем магнитном поле столь большим числом степеней свободы и различных ветвей колебаний, что хоть в какой-то степени подробное их описание становится просто невозможным. Поэтому мы здесь ограничимся рассмотрением только принципиально новых явлений, присущих лишь магнитоактивной плазме.

Прежде всего, это ларморовское вращение заряженных частиц вокруг силовых линий магнитного поля с частотой $\Omega_\alpha = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}$, где B_0 — индукция внешнего магнитного поля, которое мы считаем направленным вдоль оси OZ . Это вращение, по сути, представляет собой собственную частоту колебаний отдельной частицы в плазме. Иными словами, диэлектрическая проницаемость должна иметь полюса при $\omega = n\Omega_\alpha$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Во-вторых, внешнее магнитное поле обладает определенной упругостью и оказывает на плазму давление $B_0^2/8\pi$, что должно проявиться наряду с газокINETическим давлением $P_0 = \sum_\alpha N_\alpha T_\alpha$, но только поперек силовых линий. В конечном счете, это должно проявиться в акустических колебаниях в виде новой ветви.

Именно эти эффекты и будут в основном продемонстрированы ниже.

Как и в предыдущей главе, начнем рассмотрение бесстолкновительной плазмы, т. е. будем исходить из уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (180)$$

Равновесная функция распределения f_0 удовлетворяет этому уравнению в однородном и стационарном пределе и при наличии внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0 \parallel OZ$, т. е.

$$e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \Omega \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0. \quad (181)$$

В частности, f_0 может быть термодинамически равновесным распределением Максвелла

$$f_0 = \frac{N}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-mv^2/2T}. \quad (182)$$

Сама же плазма, как и выше, считается квазинейтральной, то есть $\sum_\alpha e_\alpha N_\alpha = 0$.

Малое отклонение от равновесного распределения δf находится из решения линеаризованного уравнения Власова

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f + \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} = e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (183)$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее очевидному условию периодичности

$$\delta f(\varphi + 2\pi) = \delta f(\varphi), \quad (184)$$

записывается в виде

$$\delta f = \frac{e}{\Omega} \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \left(\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\varphi'} \exp \left[\frac{i}{\Omega} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\varphi''}) \right]. \quad (185)$$

Подставляя это выражение в формулу для тока, индуцированного в плазме

$$\mathbf{j}_i = \sum e \int \mathbf{v}_i \delta f d\mathbf{p}, \quad (186)$$

находим тензор проводимости $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$, а затем и тензор диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij} = \\ &= \delta_{ij} + \sum \frac{4\pi e^2}{\omega \Omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_0^{\infty} d\varphi' v_j(\varphi') e i \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}_{\varphi''}). \end{aligned} \quad (187)$$

Этот тензор состоит из шести независимых компонент

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xz} & -\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (188)$$

имеющих довольно громоздкий вид, и мы здесь их в общем случае выписывать не будем. Тем более, мы не будем анализировать дисперсионное уравнение малых электромагнитных колебаний

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right| = 0, \quad (189)$$

которое описывает бесчисленное множество ветвей и содержит всю информацию о линейных электромагнитных свойствах плазмы.

Рассмотрим только два выражения и вытекающие из них следствия. Это выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) &= \varepsilon_{xx} \pm i\varepsilon_{yy} = 1 + \sum \frac{2\pi e^2}{\omega} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{v_{\perp}^2}{\omega - k_z v_z \mp \Omega} = \\ &= 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega \mp \Omega)} J_{\pm} \left(\frac{\omega \mp \Omega}{k_z v_T} \right), \end{aligned} \quad (190)$$

описывающие поперечные ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$) поля, неоднородные только вдоль внешнего магнитного поля ($k_{\perp} = 0, k_z = k$), и

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \sum \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{r} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left[1 - \sum_n \frac{\omega J_n^2(b)}{\omega - k_z v_z - n\Omega} \right] = \\ &= 1 + \sum \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega} A_n(z) J_+ \left(\frac{\omega - n\Omega}{k_z v_T} \right) \right], \end{aligned} \quad (191)$$

описывающее продольное поле ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) с произвольной пространственной неоднородностью ($k_{\perp} \neq 0, k_z \neq 0$). Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя, $b = k_{\perp} v_{\perp} / \Omega$, а $A_n(x) = I_n(x) e^{-x}$, где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Два знака в формуле (190) соответствуют двум возможным поперечным поляризациям поля \mathbf{E} .

Прежде всего заметим, что подынтегральные выражения в (190) и (191) имеют полюса при

$$\omega - k_z v_z - n\Omega = 0, \quad (192)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Как и в случае изотропной плазмы, наличие полюсов соответствует появлению диссипации, обусловленной излучением и поглощением электромагнитных полей частицами плазмы. Часто при $n = 0$ такое взаимодействие частиц с полем называют черенковским излучением и поглощением, а при $n \neq 0$ — циклотронным. Легко понять, однако, что такое деление весьма условно, поскольку, если учесть, что частицы в магнитном поле вращаются и тем самым обладают собственной частотой колебаний, то и циклотронное взаимодействие можно считать черенковским, но с учетом сдвига частоты на собственные частоты (эффекта Доплера). Так или иначе, но полюса в (190) и (191) следует понимать как

$$\frac{1}{\omega - k_z v_z - n\Omega} = \frac{\mathfrak{R}}{\omega - k_z v_z - n\Omega} - i\pi\delta(\omega - k_z v_z - n\Omega), \quad (193)$$

что и соответствует появлению бесстолкновительной диссипации энергии поля в среде.

Эффект Доплера в формулах (190) и (191) проявляется и в характере поведения электромагнитного поля в магнитоактивной плазме. Так, поперечное поле в плазме скинировано не в области низких частот, а в области циклотронных частот, когда $|\omega \mp \Omega_e| \ll k_z v_{Te}$, причем используя (190) для определения глубины скинирования в этой области частот получаем³

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_{\perp} = i \frac{\omega_L e \omega}{k v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (194)$$

³ Ниже для простоты мы ограничиваемся чисто электронной плазмой.

Это уравнение аналогично уравнению (141), рассмотренному в предыдущей главе, и приводит к формуле (142), описывающей аномальный скин-эффект

$$\delta = \frac{1}{\text{Im } k} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}\omega}{v_{Te}c^2} \right)^{-1/3}. \quad (195)$$

Можно этот результат представить и на волновом (спектральном) языке. Именно, можно сказать, что вблизи циклотронной частоты появляются поперечные циклотронные волны, затухающие благодаря сильному черенковскому поглощению

$$\omega = \pm\Omega_e - i \frac{k^3 c^2 v_{Te}}{\omega_{Le}^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (196)$$

Вдали же от циклотронной частоты, когда $\omega \gg |\omega \mp \Omega_e| \gg k_z v_{Te}$, или, как говорят в оптике, вне линии циклотронного поглощения из (190) следует

$$k^2 c^2 = -\frac{\omega_{Le}^2 \omega}{\omega \mp \Omega_e} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \mp \Omega_e}{k v_{Te}} \exp \left\{ -\frac{(\omega \mp \Omega_e)^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\} \right]. \quad (197)$$

Отсюда находим частоту и декремент затухания $\omega \rightarrow \omega + i\delta$ циклотронной волны вне линии поглощения

$$\begin{aligned} \omega &= \mp \Omega_e - \frac{\omega_{Le}\omega}{k^2 c^2}, \\ \delta &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^2 c^2} \right)^2 \frac{1}{k v_{Te}} \exp \left\{ -\frac{(\omega \mp \Omega_e)^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (198)$$

Раз мы заговорили на оптической языке, запишем и решения уравнения (197) для комплексного показателя преломления $n = \frac{c}{\omega} k$ как функцию действительной частоты $\omega \sim \pm\Omega_e$. Имеем ($n \rightarrow n + i\kappa$):

$$n^2 = \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega \mp \Omega_e)}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_{Te}} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ -\frac{(\omega \mp \Omega_e)^2 c^2}{2n^2 v_{Te}^2} \right\}. \quad (199)$$

Эти формулы справедливы только вдали от линии циклотронного поглощения, пока $|\omega \mp \Omega_e| \gg n \frac{v_{Te}}{c}$. Внутри же линии при выполнении обратного неравенства мы должны воспользоваться уравнением (194), которое дает сильное поглощение волны

$$n^3 = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 c}{\omega^2 v_{Te}}. \quad (200)$$

На рис. 4 представлены решения (199) и (200) вблизи циклотронной частоты. Заштрихованная область соответствует сильному поглощению.

Собственная частота колебаний частиц влияет и на продольное поле в магнитоактивной плазме. Правда, это не касается дебаевского экранирования, которая имеет место в статическом пределе. В магнитоактивной плазме это утверждение

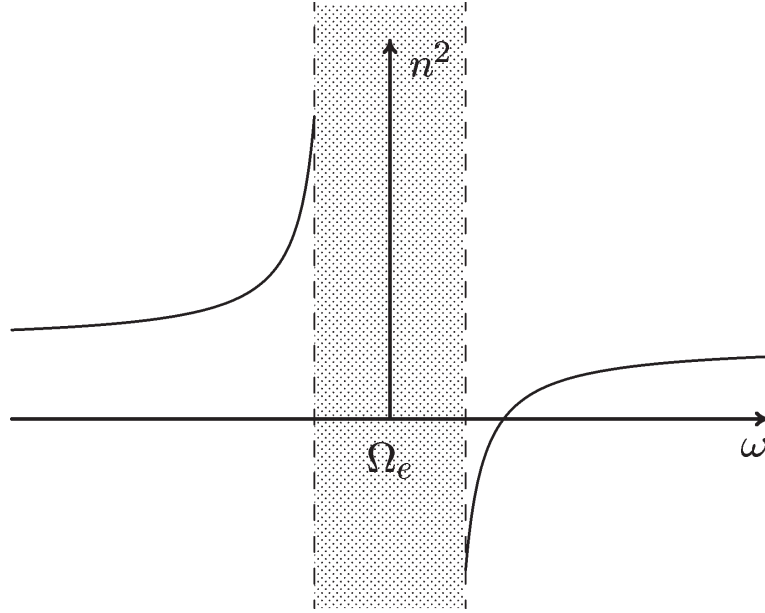


Рис. 4: Показатель преломления магнитоактивной плазмы

остаётся в силе, в чем легко убедиться, перейдя к формуле (191) к пределу $\omega \rightarrow 0$. Имеем

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (201)$$

Это выражение, как мы уже знаем, приводит к дебаевской экранировке поля статического заряда в плазме.

Вместе с тем из выражения (191) видно, что вблизи циклотронных частот, т. е. при $\omega \approx \Omega_e n$, величина $\varepsilon(\omega, k)$ обладает полюсами, а это значит, что даже в разреженной плазме существует неограниченное число циклотронных мод колебаний. Для простоты здесь мы проанализируем эти моды для электронной плазмы при их строго поперечном распространении, т. е. при $k_z = 0$. В этом пределе из (191) получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - \sum_n \frac{\omega}{\omega - n\Omega_e} A_n \left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right) \right] = \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{Le}^2 n^2 \Omega_e^2}{k^2 v_{Te}^2 (\omega^2 - n^2 \Omega_e^2)} A_n \left(\frac{k^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (202)$$

При $k \rightarrow 0$ собственные частоты равны или $\omega = n\Omega_e$ ($n > 1$) или $\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$, а при $k \rightarrow \infty$ получаем, что $\omega \rightarrow n\Omega_e$. Отсюда легко представить себе бесконечное число решений (202) в виде рис. 5, которые в литературе известны как моды Бернштейна.

Выше мы специально осветили только некоторые вопросы электродинамики магнитоактивной плазмы — с одной стороны, те, что необходимо знать каждому,

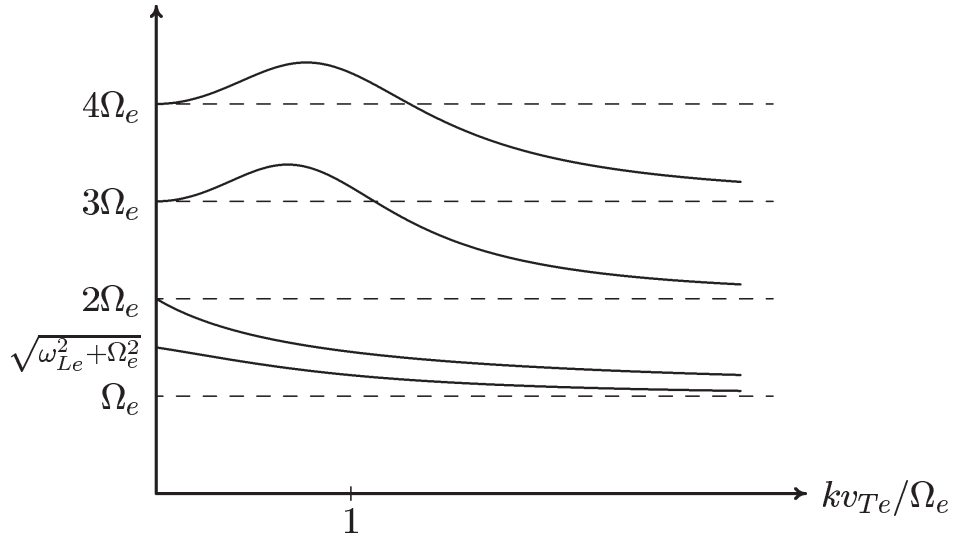


Рис. 5: Моды Бернштейна

а с другой, те, что недостаточно освещены в известных книгах по физике плазмы. В заключение же кратко обсудим наиболее подробно описанные в литературе вопросы.

В первую очередь, рассмотрим предел “холодной” замагниченной плазмы. Он следует из (187) в условиях

$$\frac{\omega - n\Omega_\alpha}{k_z v_{T\alpha}} \gg 1, \quad \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \ll 1, \quad (203)$$

т. е. когда фазовая скорость с учетом доплеровского сдвига намного превосходит тепловую скорость частиц, а длина волны много больше их ларморовского радиуса. В нулевом приближении по этим параметрам из (187) получаем

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}, \quad (204)$$

где

$$\varepsilon_\perp = 1 - \sum \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2}, \quad g = \sum \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{\omega(\omega^2 - \Omega_\alpha^2)}, \\ \varepsilon_\parallel = 1 - \sum \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}. \quad (205)$$

Это выражение в точности совпадает с полученным в § в модели независимых частиц (либо в § в модели двухжидкостной гидродинамики, “холодной” бесстолкновительной плазмы). Там же были исследованы свойства магнитоактивной плазмы в этой модели. Таким образом, неравенства (203) можно считать условиями применимости простейшей модели двухжидкостной гидродинамики “холодной” плазмы.

Вторая простейшая модель, которая была обоснована в § — это модель одножидкостной гидродинамики бесстолкновительной неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$, совпадающая с идеальной одножидкостной магнитной гидродинамикой Альфвена. Она следует из (187) в условиях

$$\omega^2 \ll \Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2, \quad \frac{k_\perp v_{T\alpha}}{\Omega_\alpha} \ll 1, \quad v_{Ti} \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_{Te}, \quad (206)$$

когда справедливо выражение

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ 0 & -\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (207)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_i^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, & \varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} &= -i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} \frac{k_\perp}{k_z}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\omega_{Le}^2}{k_z^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (208)$$

Здесь, стремясь к точному переходу к магнитной гидродинамике идеальной жидкости, мы полностью пренебрегли диссипацией энергии в плазме. Подстановка (208) в дисперсионное уравнение (189) приводит к исследованным выше спектрам гидродинамических волн. Таким образом, неравенства (216) являются условиями их справедливости.

Учет столкновений частиц при описании свойств магнитоактивной плазмы

Учет столкновений еще больше усложняет многообразие свойств магнитоактивной плазмы. Поэтому и здесь мы ограничимся только наиболее характерными явлениями, обусловленными столкновениями частиц, и как в случае изотропной плазмы продемонстрируем это с помощью кинетического уравнения с модельным интегралом столкновений БТК в изотермическом приближении. При этом для малого отклонения функции распределения от равновесной максвелловской (185) имеем интегральное уравнение типа Вольтера

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\delta f_\alpha + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} - \Omega_\alpha \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \varphi} = \\ = -\nu_{\alpha n} \left(\delta f_\alpha - \Phi_{\alpha n} \int d\mathbf{p} \delta f_\alpha \right), \end{aligned} \quad (209)$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \frac{1}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-m_\alpha v^2 / 2T_\alpha}.$$

Это уравнение решается совершенно так же, как это было сделано в § в предыдущей главе. Поэтому мы здесь опустим все промежуточные выкладки и приведем окончательные формулы для эффективной поперечной диэлектрической проницаемости для описания поперечного электромагнитного поля неоднородного только вдоль внешнего магнитного поля, т. е. $k_{\perp} = 0$, $k_z \neq 0$ (ср. с (190)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega, k_z) &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega} [\varepsilon_{xx}^{(\alpha)} - 1 \pm i\varepsilon_{xy}^{(\alpha)}] = \\ &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega[(\omega + i\nu_{\alpha n}) \mp \Omega_{\alpha}]} J_{\pm} \left(\frac{\omega \mp \Omega_{\alpha} + \nu_{\alpha n}}{k_z v_{T\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (210)$$

а также для эффективной продольной диэлектрической проницаемости, описывающей потенциальное поле ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) с произвольной пространственной неоднородностью), т. е. $k_{\perp} \neq 0$, $k_z \neq 0$ (ср.с. (191)).

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= \\ &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{1 - \sum_n \frac{\omega + i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_{\alpha}} A_n(z_{\alpha}) J_{\pm} \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - \Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right)}{1 - \sum_n \frac{i\nu_{\alpha n}}{\omega + i\nu_{\alpha n} - n\Omega_{\alpha}} J_{\pm} \left(\frac{\omega + i\nu_{\alpha n} - \Omega_{\alpha}}{k_z v_{T\alpha}} \right)}. \end{aligned} \quad (211)$$

При $\nu_{\alpha n} \rightarrow 0$ т. е. в пределе бесстолкновительной плазмы выражения (210) и (211) очевидным образом переходят в (190) и (191) соответственно.

Начнем с анализа эффективной поперечной диэлектрической проницаемости (210). Из сравнения этого выражения с (190), совершенно так же, как в случае изотропной плазмы в области низких частот, мы видим, что в магнитоактивной плазме в области электронной циклотронной частоты характер диссипации поперечного поля существенным образом зависит от отношения

$$\frac{\nu_{en}}{k_z v_{Te}} \sim \frac{\nu_{en}}{v_{Te}} \left(\frac{c^2 \nu_{Te}}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/3}.$$

Если это отношение меньше единицы, то диссипация определяется черенковским поглощением поля и имеет место аномальный скин-эффект. В обратном же пределе при $|\omega - \Omega_e| < \nu_{en}$ вместо (198) имеем

$$\delta \approx \frac{1}{\text{Im}} \approx \left(\frac{c^2 \nu_{en}}{\omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/2}. \quad (212)$$

На языке спектров в этом случае вместо (196) мы должны записать

$$\omega = \Omega_e - i \frac{k^2 c^2 \nu_{en}}{\omega \omega_{Le}^2}. \quad (213)$$

Здесь мы видим полную аналогию с поперечным полем в изотропной плазме в области низких частот и заключаем, что наличие магнитного поля эквивалентно доплеровскому сдвигу частоты на Ω_e .

Перейдем теперь к обсуждению эффективной продольной диэлектрической проницаемости (211). Прежде всего отметим, что в статическом пределе, т. е. при $\omega \rightarrow 0$ из (211) следует

$$\varepsilon(0, k) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{r_D^2}. \quad (214)$$

Как и следовало ожидать это выражение совпадает (201) и свидетельствует о том, что в магнитоактивной плазме, так же как и в изотропной, в статическом пределе независимо от частоты столкновений частиц имеет место дебаевская экранировка продольного поля.

Новое, которое возникает для продольного поля в магнитоактивной плазме, связано с характером расплывания неоднородности, или другими словами, с диффузией частиц при наличии градиентов плотности. Для того чтобы убедиться в этом, запишем выражение (211) в низкочастотном пределе $kv_{T\alpha} \ll \nu_{\alpha n}, \Omega_{\alpha}$:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \frac{\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 \nu_{\alpha n}}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2} + \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha n}^2}}{\omega + i \nu_{\alpha n} \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2} + \frac{k_z^2 v_{T\alpha}^2}{\nu_{\alpha n}^2} \right)}. \quad (215)$$

Из полюсов этого выражения мы находим диффузию короткомасштабных (меньше дебаевского радиуса) неоднородностей, которая описывается одночастичной диффузией:

$$\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} - D_{\perp}^{(\alpha)} \Delta_{\perp} N_{\alpha} - D_{\parallel}^{(\alpha)} \frac{\partial^2 N_{\alpha}}{\partial z^2} = 0, \quad (216)$$

где

$$D_{\perp}^{(\alpha)} = \frac{v_{T\alpha}^2 \nu_{\alpha n}}{\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2}, \quad D_{\parallel}^{(\alpha)} = \frac{v_{T\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \quad (217)$$

— соответственно поперечный и продольный коэффициенты диффузии частиц сорта α . В случае же длинномасштабных неоднородностей диффузию определяют нули диэлектрической проницаемости (215). Это приводит к амбиполярной диффузии квазинейтральных возмущений ($N_e = N_i = N$)

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D_{\perp}^{(a)} \Delta_{\perp} N - D_{\parallel}^{(a)} \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 0, \quad (218)$$

причем

$$D_{\perp}^{(a)} = \frac{\nu_{en}(v_{Ti}^2 + v_s^2)}{\nu_{en}\nu_{in} + |\Omega_e\Omega_i|}, \quad D_{\parallel}^{(a)} = \frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{\nu_{in}} \quad (219)$$

— поперечный и продольный коэффициенты амбиполярной диффузии.

В заключение приведем связь одночастичных коэффициентов диффузии с парциальными статическими проводимостями в плазме. Согласно соотношению Эйнштейна,

$$D_{ij}^{\alpha} = \frac{T_{\alpha}}{e_{\alpha}^2 N_{\alpha}} \sigma_{ij}^{\alpha}(0). \quad (220)$$

Учитывая (217) отсюда находим парциальные поперечную и продольную проводимости

$$\sigma_{\perp}^{\alpha} = \frac{e_{\alpha}^2 \nu_{\alpha n} N_{\alpha}}{m_{\alpha} (\Omega_{\alpha}^2 + \nu_{\alpha n}^2)}, \quad \sigma_{\parallel}^{\alpha} = \frac{e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha n}}. \quad (221)$$

Отметим, что эти соотношения справедливы только в статическом пределе и в условиях применимости двухжидкостной гидродинамики, причем определяют лишь диагональные компоненты тензора проводимости.

Лекция 8.

Электродинамика неоднородной плазмы

Электромагнитные свойства пространственно-ограниченной плазмы. Поверхностные волны

В случае пространственно-ограниченной плазмы появляются две новые проблемы. Первая — проблема новых типов волн, которые существенно связаны с поверхностью плазмы, т. е. распространяются вдоль поверхности и затухают при удалении от нее как вглубь плазмы. Такие волны называются поверхностными. Вторая проблема, давно и хорошо известна как проблема Френеля, связана с отражением и преломлением электромагнитных волн, падающих на поверхность плазмы. Вторая проблема тесно связана с первой, поскольку при ее решении необходимо знание всех волн, которые могут возбудиться в плазме при падении на нее внешней электромагнитной волны. Кроме того, эта проблема в отличие от проблемы Френеля, получила свое развитие относительно недавно, начиная с 1970-х гг., и является достаточно свежей. С нее мы и начнем.

Изучение свойств ограниченной плазмы невозможно без знания граничных условий, и здесь возникают определенные трудности. Так, при использовании кинетического описания нужно решить задачу об удержании плазмы: что удерживает плазму от теплового расширения, как ее частицы отражаются от поверхности и какова структура самого приграничного слоя. Ответы на эти вопросы зависят от того, удерживается ли плазма в стеклянном сосуде, или удерживается магнитным полем. В последнем случае можно сказать что-то вполне определенное, что мы и сделаем в следующей главе. В настоящей же главе мы в основном ограничимся простейшими моделями плазмы, в которых вопрос о граничных условиях решается очевидным образом.

Начнем с рассмотрения “холодной” плазмы, которую не нужно удерживать и которая описывается моделью независимых частиц. Диэлектрическая проницаемость такой плазмы в отсутствие внешних полей имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega, \mathbf{r})\delta_{ij}, \quad \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2(\mathbf{r})}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha})}. \quad (222)$$

Очень важно, что это выражение справедливо в случае произвольно неоднородной плотности частиц $n_{\alpha}(\mathbf{r})$. Поэтому, рассматривая полуограниченную плазму, мы будем считать, что

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}) = \begin{cases} n_{0\alpha} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (223)$$

Теперь мы можем записать уравнение Максвелла с учетом (222) и (223) и представить поля без ограничения общности в виде $A(x) \exp(-i\omega t + ik_z z)$ (т. е. ось OZ выбрана вдоль поверхности плазмы).

Имеем

$$\begin{aligned} k_z E_y + \frac{\omega}{c} B_x &= 0, & k_z B_y - \frac{\omega}{c} \varepsilon E_x &= 0, \\ k_z E_x + i \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c} B_y &= 0, & k_z B_x + i \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\omega}{c} \varepsilon E_y &= 0, \\ i \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\omega}{c} B_z &= 0, & i \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\omega}{c} \varepsilon E_z &= 0. \end{aligned} \quad (224)$$

Эти уравнения дополняются очевидными граничными условиями, которые следуют непосредственно из них же путем интегрирования по бесконечно малому по сравнению с размером неоднородности полей $\mathbf{E}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ слою между точками $x = 0 - \delta$ и $x = 0 + \delta$, где $\delta \rightarrow 0$:

$$\left\{ E_z \right\}_{x=0} = \left\{ E_y \right\}_{x=0} = \left\{ B_z \right\}_{x=0} = \left\{ B_y \right\}_{x=0}. \quad (225)$$

При получении этих соотношений учитывались конечность полей \mathbf{E} и \mathbf{B} и конечность скачка плотности $n_\alpha(x)$.

Уравнения (224) легко сводятся к двум уравнениям для компонент полей E_z и B_z

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - k_z^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z \right) = 0, \quad (226)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - k_z^2 B_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B_z = 0. \quad (227)$$

Остальные компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{B} выражаются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{\varkappa^2} k_z \frac{\partial E_z}{\partial x}, & B_y &= -\frac{i\omega}{c\varkappa^2} \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ E_y &= \frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, & B_x &= -\frac{ik_z}{\varkappa^2} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \end{aligned} \quad (228)$$

где $\varkappa^2 = k_z^2 - \omega^2 \varepsilon / c^2$.

Уравнения (226)- (227) и соотношения (228) пригодны во всей области изменения x , как внутри плазмы при $x \geq 0$, так и при $x \leq 0$. Поэтому мы можем найти поля в этих областях и сшить найденные решения с помощью граничных условий (225). Прежде, однако, заметим, что существует решение уравнения (226)

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 0. \quad (229)$$

соответствующее чисто потенциальной объемной волне, запертой внутри плазмы и обладающей спектром электронных плазменных колебаний. Остальные уравнения

делятся на два несвязанных между собой класса для компонент E_x , E_z , B_y и B_x , B_z , E_y . Первый класс называют ТМ или Е-волной, а второй ТЕ или В-волной. При анализе решений этих уравнений, как уже говорилось, следует различать две постановки задачи: задачу на собственные значения, или, как говорят, задачу о локализованных вблизи поверхности волнах, известных как поверхностные волны, и задачу Френеля — отражения и преломления падающей на поверхность плазмы электромагнитной волны. В настоящем разделе рассматривается только первая из этих задач. Вторая задача будет рассмотрена в конце этой главы.

Можно показать, что уравнение (227) для волны В-типа не допускает решений в виде поверхностной волны. Поэтому ограничимся анализом уравнения (226) для волны Е-типа и в соответствии с постановкой задачи о поверхностной волне запишем его решение в виде

$$E_z = \begin{cases} c_1 \exp \left[-x \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \right] & \text{при } x \geq 0, \\ c_2 \exp \left[x \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon} \right] & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (230)$$

При этом предполагается, что $\omega^2 < k_z^2 c^2$, т. е. волна медленная, и $k_z^2 c^2 > \omega^2 \varepsilon$, что при $\omega > \nu_e$, т. е. в слабостолкновительной плазме, выполняется всегда. Подставляя (230) в граничные условия для E_z и B_y с учетом (228) окончательно получим дисперсионное уравнение для искомой поверхностной волны Е-типа

$$\begin{aligned} \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon} + \varepsilon \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = \\ = \sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 - \omega^2} + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \sqrt{k_z^2 c^2 - \omega^2} = 0. \end{aligned} \quad (231)$$

Здесь мы полностью пренебрегли столкновениями, $\nu_e \rightarrow 0$. Решение уравнения (231) представлено на рис. 6.

В длинноволновом (низкочастотном) пределе $\omega = k_z c$, и поле волны в сильной степени поперечно, в то время как в коротковолновом (высокочастотном) $\omega = \omega_{Le} / \sqrt{2} \ll k_z c$, и поле почти потенциально. В этом последнем пределе можно было бы исходить из уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_z^2 \varepsilon \Phi. \quad (232)$$

Отсюда находим и граничные условия

$$\left\{ \Phi \right\}_{x=0} = \left\{ \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\}_{x=0} = 0. \quad (233)$$

Сформулированная задача приводит к следующему дисперсионному уравнению для поверхностной волны:

$$\varepsilon = -1, \Rightarrow \omega = \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}} - i\frac{\nu_e}{2}. \quad (234)$$

Здесь мы учли слабое столкновительное затухание высокочастотной плазменной поверхностной волны. Его учет приводит к слабому затуханию в длинноволновом пределе. Мы здесь не будем учитывать столкновения, лишь заметим, что учет теплового движения и связанного с ним бесстолкновительного затухания для поверхностной волны оказывается важнее. Это связано с затуханием поля в поперечном к поверхности плазмы направлении, что приводит к ее эффективному “замедлению” и возрастанию роли бесстолкновительного поглощения. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе.

Здесь же обсудим вопрос о поверхностных волнах в замагниченной полугораниченной плазме, считая магнитное поле параллельным поверхности, что соответствует реальной ситуации. При наличии внешнего магнитного поля задача в общем случае становится весьма громоздкой, и поэтому мы ограничимся рассмотрением очень медленных волн, считая поле потенциальным. Тензор диэлектрической проницаемости в модели независимых частиц, который уже неоднократно выписывался, оказывается справедливым для произвольно неоднородной плазмы. Воспользуемся им в бесстолкновительном приближении

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (235)$$

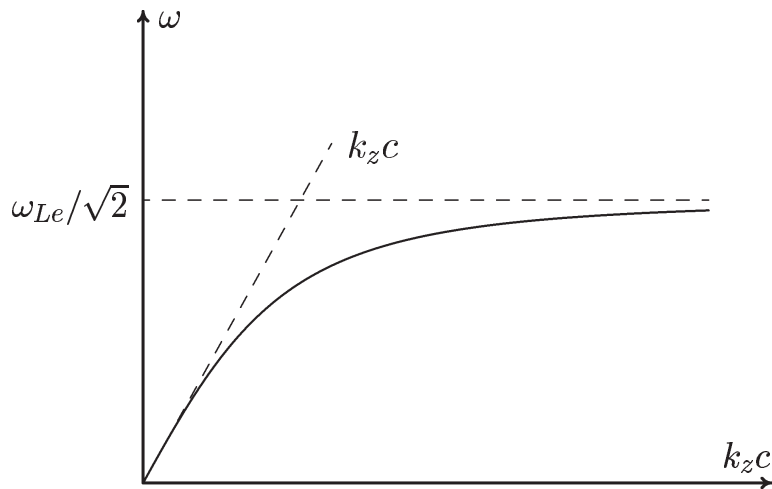


Рис. 6: Закон дисперсии поверхностных волн

где

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad g = \sum \frac{\omega_L^2 \Omega}{\omega(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad \varepsilon_{\parallel} = 1 - \sum \frac{\omega_L^2}{\omega^2}. \quad (236)$$

При наличии магнитного поля $\mathbf{B}_0 \parallel OZ$ решения уравнений поля уже следует искать в виде $A(x) \exp(-i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, в результате уравнение Пуассона примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} = \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y^2 \varepsilon \Phi - k_y \Phi \frac{\partial g}{\partial x} - k_z^2 \varepsilon_{\parallel} \Phi = 0. \quad (237)$$

Отсюда находим граничные условия

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \varepsilon_{\perp} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - k_y g \Phi \right\}_{x=0} = 0. \quad (238)$$

Подставляя решения уравнения (237)

$$\Phi = \begin{cases} C_1 \exp\left(-\sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} x\right) & \text{при } x > 0, \\ C_2 \exp\left(\sqrt{k_y^2 + k_z^2} x\right) & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (239)$$

в граничные условия, получаем дисперсионное уравнение потенциальной поверхностной волны вблизи поверхности замагниченной полуограниченной плазмы

$$\varepsilon_{\perp} \sqrt{k_y^2 + k_z^2 \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} + k_y g + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = 0. \quad (240)$$

При анализе этого уравнения отметим два важных следствия. Во-первых, поверхностная волна в магнитоактивной плазме существует только при конечной напряженности внешнего магнитного поля, пока второе слагаемое в уравнении (240) остается определяющим. Во-вторых, благодаря именно этому слагаемому поверхностная волна оказывается однонаправленной в том смысле, что

$$\omega(k_y) \neq \omega(-k_y). \quad (241)$$

В этом особенно легко убедиться для волн с $k_z = 0$ и $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i$, когда решение (240) записывается в виде

$$\omega = \frac{k_y}{|k_y|} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e (2 + \omega_{Le}^2 / \Omega_e^2)}. \quad (242)$$

Об однонаправленных волнах впервые заговорили в начале 1980-х гг. применительно к плазме твердого тела. Они обладают многими интересными свойствами, например, не существует стоячих однонаправленных волн. Ниже, в следующей главе, мы убедимся в очень важной роли однонаправленных волн в магнитоактивной плазме, локализованных вблизи границы плазмы в области ее неоднородности.

Кинетическая теория поверхностных волн в плазме

Вернемся теперь к вопросу о влиянии теплового движения частиц на поглощение поверхностных волн в полуграниченной плазме. Для этого воспользуемся уравнениями Власова–Максвелла, считая равновесное распределение максвелловским

$$f_{0\alpha} = \frac{n_{0\alpha}(x)}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} e^{-m_\alpha v^2/2T_\alpha}, \quad (243)$$

где $n_{0\alpha}$ имеет вид (223). Для малого отклонения от равновесного распределения $\delta f_\alpha(x) \exp(-i\omega t + ik_z z)$ имеем

$$-i(\omega - k_z v_z) \delta f_\alpha + \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + e_\alpha \mathbf{E} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (244)$$

Это дифференциальное уравнение должно быть дополнено граничным условием. В качестве такого мы выберем самое простое, соответствующее упругому отражению частиц от поверхности плазмы

$$\delta f_\alpha(0, v_x > 0) = \delta f_\alpha(0, v_x < 0). \quad (245)$$

Для формулировки задачи на собственные значения для поверхностных волн представим $\delta f(x, v_x)$ в виде

$$\begin{aligned} \delta f(x, v_x) &= \delta f^+(x, v_x) + \delta f^-(x, v_x), \\ \delta f^\pm(x, v_x) &= \begin{cases} \delta f(x, v_x > 0), \\ \delta f(x, v_x < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (246)$$

Очевидно, что $\delta f^\pm(x, v_x)$ по отдельности удовлетворяют уравнению Власова (244), а граничные условия к ним следует записать в виде

$$\delta f^+(0, v_x) = \delta f^-(0, v_x), \quad \delta f^-(\infty, v_x) = 0. \quad (247)$$

Последнее условие соответствует затуханию возмущений $\delta f(x, v_x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $v_x < 0$ в соответствии с требованием $E(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, задача строго сформулирована: имеем уравнение Власова для $\delta f^-(v, v_x)$ с определенным нулевым граничным условием (247) при $x \rightarrow \infty$, следовательно, существует определенное ее решение, что также позволяет найти уже $\delta f^+(x, v_x)$, а следовательно, и всю функцию $\delta f(x, v_x)$. В результате находим индуцированный ток

$$j_i(x) = \sum e \int d\mathbf{p} v_i \delta f(x, v_x) = \int dx' [k_{ij}(|x - x'|) + k_{ij}(|x + x'|)], \quad (248)$$

где

$$k_{ij}(|x|) = - \sum e^2 \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{v_x} \frac{\partial f_0}{\partial p_j} \exp \left\{ i \frac{|x|}{v_x} (\omega - k_z v_z) \right\}. \quad (249)$$

Индукцированный ток определен как в области $x > 0$, так и $x < 0$ (где $j_i(x) < 0$), что означает полную формулировку задачи для уравнений Максвелла, поскольку граничные условия для них уже находятся путем интегрирования с известным током $\mathbf{j}(x)$.

Дальнейшие выкладки опустим и приведем окончательный результат: условие существования решений поверхностного типа сводится к дисперсионному уравнению для волны Е-типа, который впервые был получен А.Ф. Александровым и А.А. Рухадзе в 1978 г. и который имеет следующий вид:

$$\sqrt{\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} - 1} + \frac{2\omega}{\pi c} \int_0^\infty \left[\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^l(\omega, k)} - \frac{k_x^2 c^2}{k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{\text{tr}}(\omega, k)} \right] = 0. \quad (250)$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, причем k_x — переменная интегрирована меняющийся от 0 до ∞ , а $\varepsilon^{l, \text{tr}}(\omega, k)$ — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости изотропной бесстолкновительной плазмы, которые мы уже хорошо знаем. Более того, легко показать, что уравнение (250) сохраняет силу и при учете столкновений частиц в плазме.

Уравнение (250) пригодно для любых фазовых скоростей волн, и этом смысле оно является наиболее общим. Из него, в частности, легко получить уравнение (230) в пределе пренебрежения пространственной дисперсией, если положить $\varepsilon^l = \varepsilon^{\text{tr}} = \varepsilon(\omega)$. Мы проанализируем это уравнение в пределе $c \rightarrow \infty$, т. е. в условиях, когда поле поверхностной волны можно считать потенциальным. В этом пределе дисперсионное уравнение сводится к виду

$$1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_x |k_z|}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)} = 0. \quad (251)$$

Этому уравнению можно сопоставить уравнение для продольных волн в неограниченной плазме. Поэтому, так же как это было сделано для объемных волн, проанализируем его в пределе больших фазовых скоростей, когда $\omega \gg k_z v_{Te}$ и с хорошей степенью точности можно воспользоваться выражением (см. главу 6)

$$\varepsilon^l(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\omega^2 / 2k^2 v_{Te}^2}. \quad (252)$$

В результате из уравнения (251) получаем

$$2 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{|k_z| v_{Te}}{\omega} \right) = 0. \quad (253)$$

Очевидное решение имеет вид

$$\omega = \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{2}}, \quad \delta = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} |k_z| v_{Te}. \quad (254)$$

Таким образом, в отличие от объемной плазменной волны с экспоненциально слабым затуханием Ландау, мы имеем поверхностную плазменную волну уже не с экспоненциально слабым затуханием. Здесь проявилось наличие у поверхностной волны поперечной структуры, эквивалентной поперечному волновому числу k_{\perp} (при разложении поля в интеграл Фурье по координате x), что и приводит к уменьшению эффективной фазовой скорости поверхностной волны, а следовательно, к усиленному ее черенковскому поглощению электронами плазмы.

Наконец, уравнение (251) описывает поверхностный аналог ионно-звуковых волн в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. Действительно, используя выражение (см. главу 6)

$$\varepsilon^l = 1 - \frac{\omega_{Li}}{\omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right), \quad (255)$$

справедливое в области фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$, из уравнения (251) после несложных вычислений окончательно находим довольно громоздкое уравнение для поверхностных ионно-звуковых волн, которое, однако, имеет весьма простые асимптотики (ср. с главой 6)

$$\omega^2 = \begin{cases} k_z^2 v_s^2 & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ \frac{\omega_{Li}}{2} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2, \end{cases} \quad (256)$$

$$\frac{\delta}{\omega} = - \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m}{M} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \ll \omega_{Li}^2, \\ \frac{1}{6} \sqrt{\frac{m}{\pi M}} \frac{\omega_{Li}^3}{k_z^3 v_s^3} & \text{при } k_z^2 v_s^2 \gg \omega_{Li}^2, \end{cases} \quad (257)$$

Плазменный волновод

Выше мы решили задачу о собственных колебаниях ограниченной плазмы, локализованных вблизи ее границы, или, иными словами, задачу о поверхностных волнах. Рассмотрим теперь объемные колебания ограниченной плазмы, оставаясь опять-таки в рамках задачи на собственные колебания. При этом мы рассмотрим наиболее важную с точки зрения эксперимента задачу о собственных электромагнитных волнах плазменного волновода — цилиндрического металлического волновода, полностью заполненного плазмой. Интересуясь в основном высокочастотными волнами, ограничимся моделью независимых частиц, пренебрегая полностью

тепловым движениям и столкновениями частиц. О роли столкновений, что эквивалентно рассмотрению конечной добротности таких волноводов будут сделаны лишь краткие замечания.

Начнем с изотропной плазмы, когда диэлектрическая проницаемость имеет вид (222), причем плотность считаем зависящей от радиальной координаты

$$n_{0\alpha}(r) = \begin{cases} n_{0\alpha} & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (258)$$

Здесь R совпадает с радиусом волновода. Уравнения поля (226)–(227) в цилиндрической геометрии записываются в виде

$$\varepsilon(\omega, r) \left[\Delta_{\perp} E_z - k_z^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon E_z \right] = 0, \quad (259)$$

$$\Delta_{\perp} B_z - k_z B_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon B_z = 0, \quad (260)$$

причем они дополняются очевидными граничными условиями на металлической поверхности волновода

$$E_z \Big|_{r=R} = 0, \quad E_{\varphi} \Big|_{r=R} = \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (261)$$

Здесь тоже имеем дисперсионное уравнение (229) для объемной плазменной волны, а также решения для волн E - и B -типа соответственно

$$E_z = C_1 J_l(i\kappa r), \quad B_z = C_2 J_l(i\kappa r), \quad (262)$$

где $\kappa^2 = k_z^2 - \varepsilon\omega^2/c^2$. Подстановка этих решений в условия (261) приводит к дисперсионным уравнениям

$$\omega^2 = k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 + \frac{\mu_{ls} c^2}{R^2}, \quad \omega^2 = k_z^2 c^2 + \omega_{Le}^2 + \frac{\mu'_{ls} c^2}{R^2}, \quad (263)$$

где μ_{ls} — корни функции Бесселя $J_l(\mu_{ls}) = 0$, а μ'_{ls} — корни ее производной, $J'_l(\mu'_{ls}) = 0$. Дисперсионные кривые (263) представлены на рис. 7.

Видно, что каждая мода имеет свою критическую частоту.

Минимальные критические частоты соответствуют для E -волны $\omega = 2,4c^2/R^2$, а для B -волны $\omega = 1,7c^2/R^2$. Таким образом, наличие плазмы в волноводе превышает критические частоты как для E , так и для B волн. Это результат того, что диэлектрическая проницаемость плазмы меньше единицы.

Иная ситуация имеет место в магнитоактивной плазме. Там указанный эффект повышения критической частоты для волны B -типа ослабляется и в пределе бесконечного поля (точнее при $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$) полностью пропадает — плазменный волновод по отношению к этой волне ведет себя как вакуумный. Это физически вполне

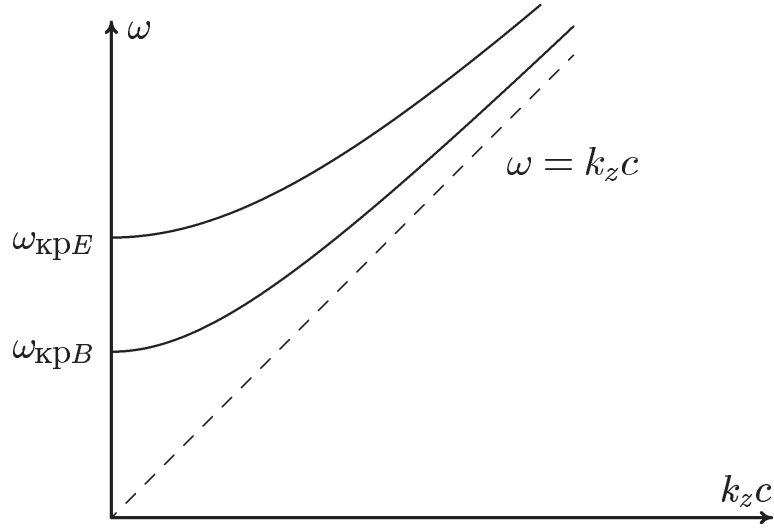


Рис. 7: Дисперсия колебаний плазменного волновода

понятно: в этой волне отличны от нуля лишь поперечные относительно поля \mathbf{B}_0 компоненты электрического поля, которые на движение электронов влияния не оказывают.

Что касается волны E -типа, то при наличии бесконечно сильного продольного магнитного поля она претерпевает более существенное изменение. Она зацепляется с продольной ленгмюровской волной и образует систему двух связанных волн. Это легко видно из уравнения для поля E_z , которое в этом случае принимает вид

$$\Delta_{\perp} E_z - \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \varepsilon E_z = 0. \quad (264)$$

Подстановка решения этого уравнения в граничное условие (261) для E_z приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{\mu_{is}^2 c^2}{R^2} + (k_z^2 c^2 - \omega^2) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (265)$$

Решения этого биквадратного уравнения представлены на рис. 8. Видны две ветви волн E -типа — быстрая для которой $\omega > k_z c$ и $\omega > \sqrt{\omega_{Le}^2 + \mu_{is}^2 c^2 / R^2}$, и медленная с $\omega < k_z c$ и $\omega \rightarrow \omega_{Le}$ при $k_z \rightarrow \infty$. Последняя мода называется волной Трайвелписа–Гулда.

Задача Френеля

В заключение этой главы мы вновь вернемся к уравнениям (226)–(227) и сформулируем для них задачу Френеля. Заметим, что здесь принята несколько иная терминология. Именно, когда на плазму падает волна E -типа, то говорят об S -поляризации поля падающей волны, а в случае волны B -типа — о P -поляризации.

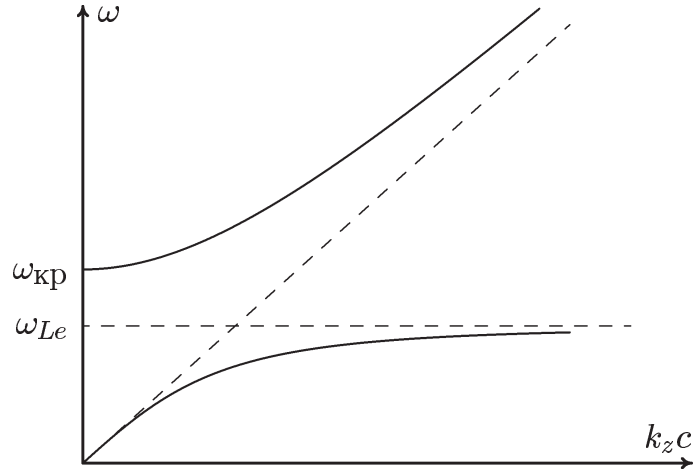


Рис. 8: Дисперсия замагниченного плазменного волновода

Мы сразу рассмотрим обе эти задачи, полагая, что в каждом из этих случаев имеем заданную падающую и искомые отраженную и преломленную волны:

$$E_z = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{cases} E_{z0} e^{ik_{x0}x} + E_{z1} e^{-ik_{x0}x} & \text{при } x \leq 0, \\ E_{z2} e^{ik_{x1}x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (266)$$

$$B_z = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{cases} B_{z0} e^{ik_{x0}x} + B_{z1} e^{-ik_{x0}x} & \text{при } x \leq 0, \\ B_{z2} e^{ik_{x1}x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (267)$$

где

$$k_{x0} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}, \quad k_{x1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_z^2}, \quad (268)$$

E_{z0} и B_{z0} — амплитуды падающих волн S и P поляризации, E_{z1} и B_{z1} — амплитуды отраженных, а E_{z2} и B_{z2} — преломленных волн соответственно. Амплитуды E_{z0} и B_{z0} считаются заданными, а E_{z1} , B_{z1} и E_{z2} , B_{z2} подлежат определению. С этой целью используются граничные условия (225) и соотношения (228). В результате получаются две независимые системы алгебраических уравнений:

$$E_{z0} + E_{z1} = E_{z2}, \quad \frac{E_{z0} - E_{z1}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}} = \frac{E_{z2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_z^2}}, \quad (269)$$

$$B_{z0} + B_{z1} = B_{z2}, \quad \frac{B_{z0} - B_{z1}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}} = \frac{B_{z2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - k_z^2}}. \quad (270)$$

Из этой алгебраической системы легко находим коэффициенты отражения и преломления волн

$$\frac{E_{z2}}{E_{z0}} = \frac{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_z^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_z^2} + \varepsilon\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}}, \quad \frac{E_{z1}}{E_{z0}} = \frac{E_{z2}}{E_{z0}} - 1, \quad (271)$$

$$\frac{B_{z2}}{B_{z0}} = \frac{2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_z^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon - k_z^2} + \varepsilon\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}}, \quad \frac{E_{z1}}{E_{z0}} = \frac{E_{z2}}{E_{z0}} - 1. \quad (272)$$

Следует отметить, что коэффициенты отражения и преломления для волны S -поляризации имеют полюс на частотах, соответствующих поверхностной волне. Однако поскольку для падающей волны $\omega > k_z c$, в то время как для поверхностной $\omega < k_z c$, возбуждение поверхностной волны при падении внешней волны на плоскую поверхность раздела оказывается невозможным.

Лекция 9.

Неоднородная плазма в магнитном поле

Плазма, удерживаемая магнитным полем и ее диэлектрическая проницаемость

Одной из важнейших прикладных проблем физики плазмы является управляемый термоядерный синтез и физика магнитного удержания плазмы в установках стационарного термоядерного синтеза. Здесь мы рассмотрим равновесие и устойчивость магнитного удержания исходя из уравнения Власова. Поскольку в термоядерных установках с тороидальной геометрией все размеры (большой и малый радиусы тора) намного больше размера неоднородности плазмы, ограничимся рассмотрением плоской геометрии. Плазма удерживается от расплывания вдоль оси продольным магнитным полем, параллельным оси OZ . Равновесная функция распределения частиц сорта α при этом определяется из уравнения

$$v_x \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} - \Omega_\alpha \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \varphi} = 0. \quad (273)$$

Решением этого уравнения является произвольная функция характеристики уравнения

$$\frac{dx}{v_\perp \cos \varphi} = - \frac{d\varphi}{\Omega_\alpha(x)} \quad (274)$$

или

$$v_\perp \sin \varphi + \int^x dx' \Omega_\alpha(x'). \quad (275)$$

Таким образом, решение уравнения (273) представляется в виде

$$f_{0\alpha}(E, C) = \left(1 + \frac{v_\perp \sin \varphi}{\Omega_\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_{M\alpha}(x), \quad (276)$$

где

$$f_{M\alpha}(x) = \frac{n_{0\alpha}(x)}{(2\pi m_\alpha T_\alpha(x))^{3/2}} e^{-m_\alpha v^2 / 2T_\alpha(x)}. \quad (277)$$

Здесь мы приняли, что неоднородность плазмы больше ларморовского радиуса частиц и воспользовались разложением по этому параметру. Воспользовавшись уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 = \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{v}_\alpha f_{0\alpha}(x), \quad (278)$$

получаем условию магнитогидродинамического равновесия

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + \sum_\alpha n_{0\alpha} T_\alpha \right) = 0, \quad (279)$$

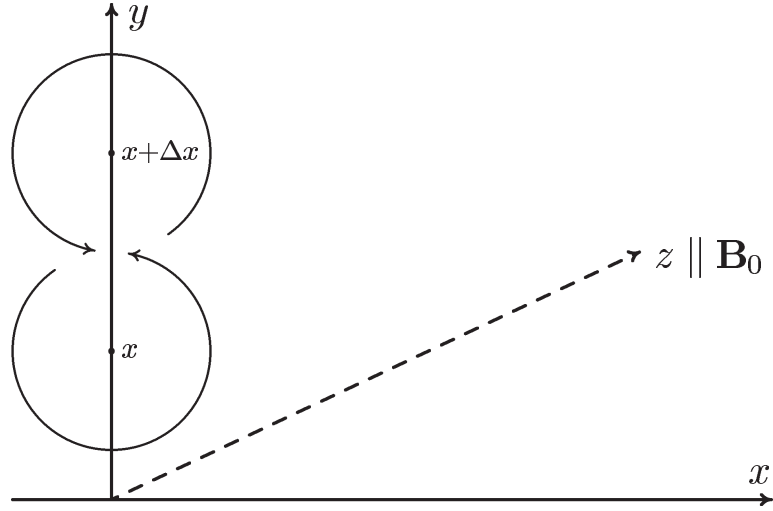


Рис. 9: Ток в неоднородной плазме

которое дополняется условием квазинейтральности плазмы.

Здесь имеет смысл пояснить физическую природу возникшего в равновесии тока \mathbf{j}_0 ; его природа легко видна из рис. 9. Магнитное поле направлено вдоль оси OZ и поэтому в точках x и $x + \Delta x$ токи ларморовского вращения частиц не компенсируют друг друга. Результирующий усредненный ток вдоль оси OY равен

$$\begin{aligned}
 j_y &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} [n_{0\alpha}(x + \Delta x) + v_{T\alpha}(x + \Delta x) - n_{0\alpha}(x) + v_{T\alpha}(x)] = \\
 &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \Delta x \frac{\partial n_{0\alpha} v_{T\alpha}}{\partial x} \approx \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\Omega_{\alpha} m_{\alpha}} \frac{\partial n_{0\alpha} v_{T\alpha}}{\partial x} \equiv \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} v_{\text{dr}\alpha}. \quad (280)
 \end{aligned}$$

Здесь $v_{\text{dr}\alpha}$ — эквивалентная токовая скорость дрейфа частиц сорта α :

$$v_{\text{dr}\alpha} \approx \frac{v_{T\alpha}}{\Omega_{\alpha}} \frac{1}{L_0}, \quad (281)$$

где L_0 — характерный размер неоднородности плазмы (плотности или температуры).

Таким образом видно, что ток (280) не связан с реальным перемещением заряда, а обусловлен тем, что в неоднородной плазме элементарные ларморовские токи каждого сорта частиц не компенсируют друг друга. При этом токи электронов и ионов складываются, в то время как дрейфовые скорости (281) имеют противоположные направления. Этот ток получил название дрейфового ларморовского тока, а скорость (281) — скорости ларморовского дрейфа.

Токовая плазма, и тем более неоднородная, является термодинамически неравновесной. Хотя отклонение функции (276) от равновесной максвелловской является малым, но это отклонение оказывается принципиально важным, поскольку приводит к появлению тока, который может возбудить электромагнитные поля в плазме за времена порядка дрейфового времени $\tau \sim 1/\omega_{\text{dr}}$, где $\omega_{\text{dr}} = k_y v_{\text{dr}} \sim v_T^2/\Omega L_0^2$

(при $T_e \sim T_i$ эта величина одного порядка для электронов и ионов). Приведем некоторые численные оценки для термоядерных условий в установках магнитного удержания. Магнитное поле $B_0 \approx 50\text{--}100$ кГс, $T_e \approx T_i \approx 10^9$ К, $L_0 \approx 10$ см. Имеем $\rho_e \ll \rho_i \approx 0,1$ см $= v_{Ti}/\Omega_i$. Поэтому разложение (276) имеет хороший запас точности. Дрейфовая скорость $v_{dre} \approx v_{dri} \approx 10^6$ см/с $\ll v_{Ti} \approx 10^8$ см/с, а $\omega_{dr} \approx 10^5$ с $^{-1}$, т. е. характерное время возбуждения электромагнитных полей в такой неравновесной плазме $\tau > 10^{-5}$ с. Эти поля могут оказаться весьма опасными для магнитного удержания плазмы, а времена их возбуждения достаточно малы. Поэтому возникает серьезная проблема исследования устойчивости плазмы с функцией распределения (276) — это центральная проблема магнитного удержания термоядерной плазмы.

Для того чтобы решить эту проблему, необходимо исследовать малые отклонения от распределения (276) и вычислить диэлектрическую проницаемость пространственно неоднородной плазмы. Здесь опять необходимо провести некоторые численные оценки, позволяющие упростить задачу. Прежде всего отметим, что дрейф частиц и связанный с ним дрейфовый ток, как видно из формул (280) и (281), локализованы в области неоднородности плазмы с пространственным масштабом $\sim L_0$. Поэтому в первую очередь следует ожидать возбуждения колебаний, локализованных именно в этой области. Это позволяет нам воспользоваться приближением геометрической оптики и рассмотреть колебания с длиной волны в направлении неоднородности⁴ $\lambda \approx 1/k_x \ll L$.

При этом все вычисления проводятся так же, как и в пространственно однородной плазме, т. е. используется локальное рассмотрение. Во-вторых, в термоядерных условиях отношение газокINETического давления к магнитному давлению очень мало. Так, при $n_e \approx n_i \approx 10^{14}$ см $^{-3}$

$$\beta \equiv \frac{8\pi \sum n_{0\alpha} T_\alpha}{B_0^2} \leq 10^{-2} \ll 1. \quad (282)$$

Это означает, согласно (274), что

$$\frac{d \ln n_0 T}{dx} \left(\frac{d}{dx} \ln \frac{B_0^2}{8\pi} \right)^{-1} \sim \frac{L_B}{L_0} \approx \frac{B_0^2}{8\pi \sum n_{0\alpha} T_\alpha} \gg 1, \quad (283)$$

а следовательно, неоднородностью магнитного поля по сравнению с неоднородностью плотности и температуры плазмы можно пренебречь. Более того, из неравенства (282) следует, что возмущение магнитного поля всегда мало и им можно

⁴ Строгое математическое обоснование приближения геометрической оптики для описания дрейфовых колебаний неоднородной плазмы, в том числе локального приближения, было дано В. П. Силиным и А. А. Рухадзе в 1964 г.

пренебречь. Это же, в свою очередь, означает, что поле малых колебаний может только электрическим, а поэтому чисто потенциальным. Потенциальные же колебания, как мы уже неоднократно отмечали выше, описываются дисперсионным уравнением

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}, x). \quad (284)$$

Таким образом, наша задача состоит в вычислении эффективной продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x)$ в приближении геометрической оптики. Для этого необходимо решить линеаризованное уравнение Власова для малого отклонения от функции распределения (276)

$$\delta f_\alpha = \delta f_\alpha(x) e^{-i\omega t + ik_y y + ik_z z},$$

которое записывается в виде

$$\begin{aligned} (\omega - k_y v_y - k_z v_z) \delta f_\alpha + i v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - i \Omega_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varphi} = \\ = -i e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (285)$$

В приближении геометрической оптики это уравнение решается так же, как и в случае однородной плазмы, т. е. ищется решение в виде $\sim \exp\left(i \int^x k_x dx\right)$ и производными от $k_x(x, \omega)$ пренебрегается. В результате вычислений, полностью аналогичных проведенным для однородной магнитоактивной плазмы, получим

$$\begin{aligned} \delta f_\alpha(\mathbf{k}, x) = \frac{e_\alpha}{\Omega_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) \delta_{ij} + \frac{v_i k_j}{\omega} \right]_{\varphi'} \frac{\partial f_{0\alpha}(\varphi', x)}{\partial p_j} \times \\ \times E_i(\omega, \mathbf{k}) \exp \left[\frac{i}{\Omega_\alpha} \int_{\varphi}^{\varphi'} d\varphi'' (\omega - \mathbf{k}\mathbf{k}\alpha v)_{\varphi''} \right]. \end{aligned} \quad (286)$$

Подставляя это выражение в формулу для плотности возмущенного тока, находим тензор проводимости, а тем самым, и тензор диэлектрической проницаемости. Свертка этого тензора согласно (284) приводит окончательно к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости в области низких частот $\omega \ll \Omega_\alpha$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_\alpha} \left(\frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_\alpha} \right) \right] A_0 \left(\frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (287)$$

Здесь следует отметить, что ограничение лишь областью низких частот $\omega \ll \Omega_\alpha$ не случайно. Оно следует из выражения (287), откуда видно, что качественно новых явлений следует ожидать в области частот

$$\omega \lesssim \omega_{\text{dr}\alpha} \sim \frac{k_y v_T^2}{\Omega} \frac{1}{L_0} \sim \frac{k_y v_T^2}{\Omega L_0^2} \lesssim 10^5 \text{ с}^{-1} \ll \Omega_i \sim 5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

В формуле (287) полностью пренебрегается столкновениями заряженных частиц. Их учет при использовании модельного интеграла БГК не представляет труда и приводит к очевидному обобщению формулы (287):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}, x) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k_y v_{T\alpha}^2}{\omega \Omega_{\alpha}} \left(\frac{\partial \ln N_{\alpha}}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial T_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right) \right] A_0 \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right\} \times \\ \times \left[1 - \frac{i\nu_{\alpha}}{\omega + i\nu_{\alpha}} A_0 \left(\frac{k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{k_z v_{T\alpha}} \right) \right]^{-1}. \quad (288) \end{aligned}$$

Заметим, что хотя для проблемы магнитного удержания термоядерной плазмы роль столкновений ничтожна, но для изучения физической природы дрейфовой неустойчивости их учет необходим.

Дрейфовые неустойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем

Прежде чем перейти к анализу дрейфовых колебаний, заметим, что при $\omega \rightarrow 0$ (точнее при $\nu_i, \omega \ll k_z v_{Ti}$, либо $\omega \nu_i \ll k_z^2 v_{Ti}^2 \ll \nu_i^2$) выражения (287) и (288) сводятся к виду

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2 v_{T\alpha}^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}. \quad (289)$$

Это выражение свидетельствует о том, что в статическом пределе продольная диэлектрическая проницаемость неоднородной плазмы в приближении геометрической оптики не описывает колебания поля, а соответствует его экранировке на длине порядка дебаевского радиуса. Поэтому мы сразу же рассмотрим длинноволновые колебания $k_{\perp} \ll \Omega_i$ в области $\nu_i, k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z v_{Te}, \nu_e \ll k_z v_{Te}$ в случае бесстолкновительной плазмы $\nu_i, k_z v_{Ti} \ll \omega \ll k_z^2 v_{Te}^2 / \nu_e$. В этих условиях локальное дисперсионное уравнение (284) записывается в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_s^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{k_y v_s^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x} - \frac{k_z^2 v_s^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{k_y v_{Ti}^2}{\omega \Omega_i} \frac{\partial N T_i}{\partial x} \right) \right] + \\ + i \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^2 v_{Te}^2} \chi(\omega, k) \left[1 - \frac{k_y v_{Te}^2}{\omega \Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{N}{T^{\beta}} \right] = 0. \quad (290) \end{aligned}$$

Функция $\chi(\omega, k)$ и величина β имеют различный вид в бесстолкновительном и столкновительном пределах:

$$\chi = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|k_z|v_{Te}}, & \beta = 1/2 \\ \text{для бесстолкновительной плазмы,} \\ \frac{\nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2}, & \beta = 0 \\ \text{для столкновительной плазмы.} \end{cases} \quad (291)$$

В рассматриваемом примере диссипация обусловлена черенковским поглощением волн электронами плазмы в бесстолкновительном пределе и конечной диффузией электронов — для столкновительной. В неоднородной плазме, как видно из (290), в области частот $\omega < \omega_{dr}$ мнимая часть диэлектрической проницаемости может изменить знак, и тогда диссипация становится причиной не затухания, а возбуждения полей, т. е. неустойчивости плазмы.

В уравнении (290) мнимое слагаемое мало. При $\omega \gg \omega_{dr\alpha}$ это уравнение описывает затухающие ионно-звуковые колебания, которые были исследованы в случае пространственно однородной и неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$. В неоднородной плазме возможна раскачка колебаний, причем, и это очень важно, такие нарастающие колебания возможны и в изотермической плазме с $T_e = T_i$, если только $\omega_{dr\alpha} \gg \omega \gg k_z v_s$. При этом из (290) находим их спектры (в фигурных скобках стоят множители для бесстолкновительной и столкновительной плазмы):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{k_y v_s^2}{\Omega_i} \frac{\partial \ln N}{\partial x}, \\ \delta_1 &= \frac{\omega_1^2}{|k_z|v_{Te}} \left(k^2 r_{De}^2 - \beta \frac{\partial \ln T_e}{\partial N} \right) \times \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\pi/2} \\ \nu_e / |k_z|v_{Te} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (292)$$

Неустойчивость возникает при слабой неоднородности температуры, когда

$$\beta \frac{\partial \ln T_e}{\partial N} < k^2 r_{De}^2 \ll 1$$

и

$$\omega_2^2 = -k_z^2 v_{Ti} \frac{\partial \ln T_i}{\partial N}. \quad (293)$$

Эту неустойчивость называют дрейфово-температурной. Кстати, дрейфовые волны являются однонаправленными, что видно из (290) и (292), (293).

Таким образом, мы убедились, что в неоднородной плазме, удерживаемой магнитным полем, возникает ларморовский дрейф частиц, локализованный в области неоднородности плазмы. Как следствие, это приводит к возбуждению новых

низкочастотных ветвей потенциальных колебаний с частотами $\omega \lesssim \omega_\alpha$. Столкновения частиц не только не стабилизируют неустойчивости, но и напротив могут стать причиной раскачки колебаний. Колебания стабилизируются только диффузией ионов вдоль силовых линий магнитного поля, ликвидирующей саму причину неустойчивости — неоднородность плазмы. Поэтому дрейфовые неустойчивости возможны только при условии

$$\omega_{\text{dr } \alpha} > \begin{cases} |k_z|v_{Ti} & \text{для бесстолкновительной плазмы,} \\ \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\nu_i} & \text{для столкновительной плазмы.} \end{cases} \quad (294)$$

Если принять $L_0 \sim L_\perp$, где L_\perp поперечный размер плазмы (порядка малого радиуса в тороидальной термоядерной установке), $k_y \sim 1/L_\perp$, а $k_z \sim 1/L_\parallel$, где L_\parallel — продольный размер плазмы (порядка длины тора в термоядерной установке), то условия (294) запишутся в виде

$$\frac{L_\parallel}{L_\perp} > \begin{cases} \frac{L_\perp \Omega_i}{v_{Ti}} \gg 1, \\ \sqrt{\frac{\Omega_i}{\nu_i}} \gg 1. \end{cases} \quad (295)$$

Обсудим теперь применимость теории дрейфовой неустойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем, к термоядерным установкам. В термоядерных установках сегодняшнего дня и ближайшего будущего $T_e, T_i \sim 10^8$ К, $n_e \approx n_i = 10^{14}$ см $^{-3}$, $B_0 = 50 \div 100$ кГс, $L_\perp \geq L_0 \approx 10--100$ см а $L_\parallel = 2\pi R \approx 10$ м. Поэтому $|k_z|v_{Te} \geq 6 \cdot 10^6$ с $^{-1}$, $\omega_{\text{dr}} \approx 10^4--10^5$ с $^{-1}$, $\nu_e \approx 10^4$ с $^{-1}$. Это соответствует бесстолкновительному приближению, поскольку $|k_z|v_{Te} \gg \nu_e$, а $|k_z|v_{Ti} \gg \nu_i$. Следовательно, для существования дрейфовых неустойчивостей необходимо выполнение первого из условий (295). Легко показать, что $L_\perp \approx 10$ см и $B_0 \leq 100$ кГс это условие выполняется, а при $L_\perp \approx 100$ см уже нет. Именно поэтому, учитывая что другими методами подавить дрейфовые неустойчивости нельзя, Б.Б. Кадомцев в 1955 г. предложил в качестве термоядерного реактора толстый “бублик” с $L_\parallel = 2\pi R$, $R = 1,5$ м а $L_\perp \approx 1$ м. Что касается сегодняшних установок, то в них дрейфовые колебания приводят к усиленной диффузии частиц поперек магнитного поля.

В заключении этой главы кратко обсудим еще одну неустойчивость, имеющую место при магнитном удержании, которая очень волновала физиков на ранней стадии термоядерных исследований, проводимых на пробкотронах. Простейший пробкотрон схематически представлен на рис. 10.

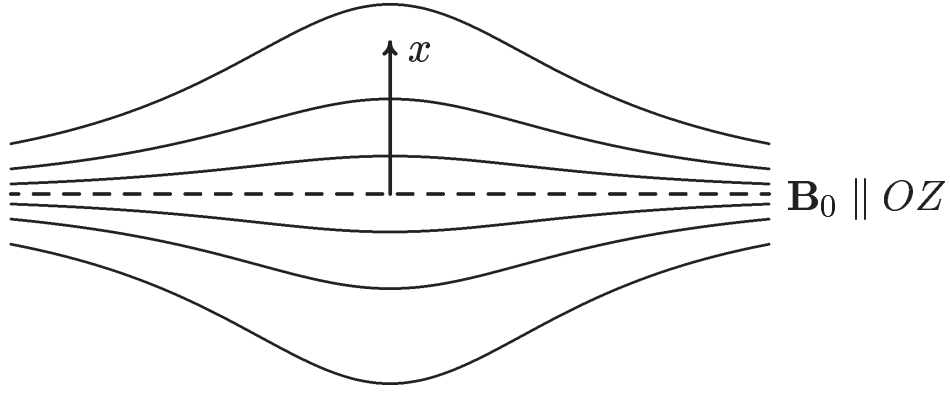


Рис. 10: Схема пробкотрона

Наличие кривизны силовых линий удерживающего магнитного поля с радиусом R приводит к появлению центробежной силы, действующей на частицы плазмы. Эту силу качественно можно учесть, введя эффективное радиальное поле “тяжести”.

$$g_\alpha = \frac{v_{T\alpha}^2}{R}, \quad (296)$$

вызывающий реальный азимутальный дрейф частиц:

$$u_\alpha = -\frac{g_\alpha}{\Omega_\alpha}. \quad (297)$$

При этом электроны и ионы дрейфуют в разные стороны, а поэтому относительный дрейф суммируется. Такая модель позволяет очень просто учесть кривизну силовых линий магнитного поля путем простой замены в формуле (287) $\omega \rightarrow \omega'_\alpha = \omega - k_y u_\alpha$, учитывающей эффект Доплера на реальном дрейфе частиц.

Теперь мы можем исследовать известную желобковую неустойчивость плазмы в пробкотроне, обусловленную кривизной силовых линий магнитного поля. Для желобковых колебаний $k_z = 0$. Если кроме того пренебречь конечностью ларморовских радиусов частиц, полагая в (287) $k_\perp^2 v_{T\alpha}^2 \ll \Omega_\alpha^2$, то дисперсионное уравнение (284) для желобковых колебаний примет вид

$$\begin{aligned} 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{k_\perp^2}{\Omega_\alpha^2} + \frac{k_y}{\Omega_\alpha \omega'_\alpha} \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right) = \\ = 1 + \frac{\omega_{Li}^2}{k^2} \left[\frac{k_\perp^2}{\Omega_i^2} + \left(\frac{k_y}{\Omega_i(\omega - k_y u_i)} - \frac{k_y}{\Omega_i(\omega - k_y u_e)} \right) \frac{\partial \ln N}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned} \quad (298)$$

Отсюда с учетом $\omega \gg k_y u_\alpha$ находим

$$\omega^2 = \frac{k_y^2 g_{\text{eff}} \frac{\partial \ln N}{\partial x}}{1 + v_A^2/c^2}, \quad (299)$$

где $g_{\text{eff}} = (v_{Ti}^2 + v_s^2)/R$. В случае положительной кривизны силовых линий, когда $g_{\text{eff}} \partial \ln N / \partial x < 0$ спектр (299) соответствует неустойчивости колебаний.

Следует заметить, что инкремент желобковой неустойчивости (299) довольно велик. Так, при $R \sim 1$ м и $T_e \sim T_i \approx 10^8$ К имеем

$$\text{Im } \omega \approx \sqrt{g_{\text{eff}} \frac{\partial \ln N}{\partial x}} \sim \sqrt{\frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{Ra}} \geq 10^{-6} \text{ с}^{-1}$$

Однако для термоядерных установок тороидального типа эта неустойчивость не опасна, поскольку она может развиваться только в очень длинных системах с

$$\frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} > \sqrt{\frac{M}{m}}, \quad \frac{L_{\perp} \Omega_i}{v_{Ti}} \gg \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

В современных установках эти неравенства не выполняются. Для пробкотронов же с открытыми концами желобковая неустойчивость была опасна и, по-видимому, именно эта особенность привела к закрытию этого направления термоядерных исследований.

Лекция 10.

Плазма в электрическом поле

Плазма в сильном постоянном и однородном электрическом поле

В этой главе мы рассмотрим плазму в сильном однородном постоянном и СВЧ электрическом полях. Начнем с постоянного электрического поля. Еще в самом начале курса при изучении процессов релаксации мы показали, что в относительно слабом постоянном электрическом поле в плазме возникает ток, обусловленный дотепловым дрейфом электронов относительно ионов

$$u = \frac{eE_0}{m\nu_e} \ll v_{Te}. \quad (300)$$

До тех пор, пока эта скорость мала по сравнению с тепловой, т.е. выполняется неравенство (300), она является постоянной. Но как только поле становится больше критического,

$$E_0 > E_{dr} = \frac{m\nu_e v_{Te}}{e}, \quad (301)$$

и формально скорость (300) превосходит тепловую, частота столкновений (или обратное время релаксации импульса) становится функцией этой скорости, и формула (300) теряет смысл. Поэтому поле E_{dr} , введенное впервые М. Драйсером, называется критическим полем Драйсера. Более того, при полях $E_0 > E_{dr}$ сечение рассеяния электронов на ионах и даже на атомах (поскольку при энергиях $E = mu^2/2 \gg I$ — потенциала ионизации атомов сечение рассеяния определяется рассеянием на отдельных электронах и ядре) становится спадающей функцией u и ведет себя как $1/u^4$. Это означает, что сила трения уменьшается с ростом скорости электронов, и наступает режим неограниченного роста скорости

$$\frac{d\mathbf{p}_e}{dt} = e\mathbf{E}_0, \quad \mathbf{p} = e\mathbf{E}_0 t. \quad (302)$$

Это явление называется убеганием электронов и описывается уравнением Власова

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e\mathbf{E}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (303)$$

откуда получаем решение

$$f_0 = f_0(\mathbf{p} - e\mathbf{E}_0 t). \quad (304)$$

Очевидно, что при учете релятивистских эффектов скорость электронов стремится к скорости света, т.е. становится постоянной, а их импульс продолжает расти линейно.

Таким образом, можно считать, что как при малых полях, меньших дрейсового, так и при очень больших, равновесная функция — это сдвинутое максвелловское распределение, вообще говоря, с переменной направленной скоростью. Однако если интересоваться процессами, протекающими за времена, меньшими времени изменения скорости, то можно воспользоваться адиабатическим приближением, считая скорость постоянной в течение развития процесса. Ниже именно такие процессы и будут рассматриваться.

В первую очередь рассмотрим устойчивость токовой плазмы в условиях, когда электроны движутся с некоторой скоростью \mathbf{u} относительно ионов. При наличии внешнего магнитного поля эта скорость считается параллельной полю. Очевидно эта задача решается путем анализа дисперсионного уравнения малых колебаний

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (305)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ тензор диэлектрической проницаемости токовой плазмы

Для вычисления этого тензора мы воспользуемся адативностью тока, знанием диэлектрической проницаемости в собственной системе, т. е. в системе, связанной с движущейся компонентой (в данном случае электронами) и преобразованиями Лоренца для плотностей тока и заряда, частоты и волнового вектора. Этот метод, обобщающий формулы преобразования Минковского электрического и магнитного полей на случай анизотропных сред с пространственной дисперсией был предложен в 1960 г. А. А. Рухадзе. В результате получаем

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \beta_{\mu i}(\mathbf{u}_{\alpha}) [\varepsilon_{\mu\nu}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha}) - \delta_{\mu\nu}] \beta_{\nu j}(\mathbf{u}_{\alpha}), \quad (306)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha} &= (1 - u_{\alpha}^2/c^2)^{-1/2}, \quad \omega'_{\alpha} = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha})\gamma_{\alpha}, \\ \mathbf{k}'_{\alpha} &= \mathbf{k} + \mathbf{u}_{\alpha}\gamma_{\alpha} \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha}}{u^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_{\alpha}} \right) - \frac{\omega}{c^2} \right], \\ \beta_{ij}(\mathbf{u}_{\alpha}) &= \frac{\omega'_{\alpha}}{\omega} \delta_{ij} + \gamma_{\alpha} \left[\frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_{\alpha}^2} \left(\frac{1}{\gamma_{\alpha}} - 1 \right) + \frac{k_i u_{\alpha j}}{\omega} \right]. \end{aligned} \quad (307)$$

Величина же $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_{\alpha}, \mathbf{k}'_{\alpha})$ — это парциальная диэлектрическая проницаемость частиц сорта α в собственной (неподвижной) системе координат, которую мы уже знаем.

а) *Бунемановская неустойчивость.* Теперь применим развитую общую теорию к конкретным задачам неустойчивости токовой плазмы. Начнем рассмотрение с так называемой высокочастотной неустойчивости Бунемана, открытой в 1959 г.

и имеющей место при скоростях $u \gg v_{Te}$. Это позволяет полностью пренебречь тепловыми скоростями частиц и подставить в (306) и (307) простые выражения

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2}\right) \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(i)} = \left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) \delta_{ij}. \quad (308)$$

Мы здесь пренебрегли и столкновениями частиц, которые в данном случае несущественны. Более того, для простоты мы рассмотрим возмущения, распространяющиеся вдоль пучка, и начнем со случая незамагниченной токовой плазмы. В результате общее дисперсионное уравнение (305) распадается на дисперсионное уравнение чисто поперечных волн, которые оказываются устойчивыми, и для продольной волны:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0. \quad (309)$$

Отсюда мы сразу же видим, что колебания в системе могут стать неустойчивыми только в области частот $\omega \ll \mathbf{k}\mathbf{u}$ и если при этом

$$\omega_{Le}^2 > (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^3. \quad (310)$$

Для неустойчивых решений имеем

$$\omega = \begin{cases} \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} \frac{1 + i\sqrt{3}\omega_{Le}}{2\sqrt{\gamma}} & \text{при } \omega_{Le}^2 = (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^3, \\ i \left(\frac{m}{2M}\right)^{1/3} \mathbf{k}\mathbf{u} \gamma^{3/2} & \text{при } (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \gamma^3 < \omega_{Le}^2. \end{cases} \quad (311)$$

Полученный результат имеет простое физическое толкование. При чисто продольном распространении волн (т. е. $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$) происходит распад общего уравнения (305) на чисто поперечное (в которых $\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$) и чисто продольное (в котором $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{u}$). Согласно закону Джоуля ток может взаимодействовать с полем, если отлично от нуля произведение

$$\mathbf{j}\mathbf{E} = en_e \mathbf{u}\mathbf{E} = enu E_{\parallel}. \quad (312)$$

т. е. если в возмущениях отлична от нуля продольная компонента поля. В рассматриваемом случае чисто продольного распространения волн только в продольной волне $E_{\parallel} \neq 0$ и поэтому только эта волна и неустойчива. Поскольку $\omega \ll \mathbf{k}\mathbf{u}$, то природа неустойчивости — вынужденное черенковское излучение электромагнитного поля движущимися электронами.

Следует отметить, что внешнее продольное магнитное поле на рассмотренную неустойчивость влияния не оказывает пока $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{u}$ т. е. $\mathbf{k}_{\perp} = 0$. Это понятно, поскольку в волне $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$, и характер движения частиц плазмы при наличии магнитного поля не меняется.

Не представляет труда обобщить полученные выше результаты на случай ограниченной плазмы. Сделаем это для цилиндрического волновода, заполненного токовой плазмой. Поскольку мы уже знаем, что неустойчивость Бунемана имеет место в области частот $\omega \ll \mathbf{k}u$ то вправе сразу же рассмотреть потенциальное приближение, считая $\omega \ll kc$. Более того, рассмотрим наиболее интересный с экспериментальной точки зрения случай, когда имеется внешнее магнитное поле, удовлетворяющее условиям

$$\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2, \quad \omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2. \quad (313)$$

Это позволяет считать ионы незамагниченными, а электроны, напротив, сильно замагниченными, и записать для Пуассона уравнение потенциала поля Φ — в виде

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) \Delta\Phi - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} k_z^2 \Phi = 0. \quad (314)$$

Это уравнение дополняется очевидным граничным условием

$$\Phi(r) \Big|_{r=R} = 0. \quad (315)$$

Подставляя общее решение уравнения (314)

$$\Phi(r) = e^{i\varphi} \Phi_0 J_l \left(r \frac{\mu_{ls}}{R} \right) \quad (316)$$

в граничное условие (315) получим дисперсионное уравнение колебаний токовой плазмы в волноводе:

$$\left(1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}\right) \left(k_z^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{R^2}\right) - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3} k_z^2}{(\omega - k_z u)^2} = 0. \quad (317)$$

Отсюда легко находим, что неустойчивость имеет место при условии

$$\omega_{Le}^2 > \gamma^3 u^2 \left(k_z^2 + \frac{\mu_{ls}^2}{R^2}\right). \quad (318)$$

Учитывая, что $\min \mu_{ls} = \mu_{00} = 2,4$ в длинных системах $L \gg R$ из формулы находим критический ток

$$J_{cr} = \frac{mc^3}{4e} (2,4)^2 (\gamma^2 - 1)^{3/2} \approx 24 (\gamma^2 - 1)^{3/2} \approx 24 \gamma^3 \text{ кА}. \quad (319)$$

При $J > J_{cr}$ ток в плазменном волноводе становится неустойчивым. Эта формула неоднократно была подтверждена экспериментально как для нерелятивистских, так и релятивистских случаев.

б) *Неустойчивость расслоения.* Выше мы рассмотрели высокочастотную бунемановскую неустойчивость черенковского типа, которая развивается существенно

при $k_z \neq 0$. Существует, однако, неустойчивость и при $k_z = 0$, т. е. для возмущений желобкового типа, которая известна как неустойчивость расслоения токовой плазмы. Она возможна только в отсутствие внешнего магнитного поля. В этом случае дисперсионное уравнение (305) с учетом (306)–(308) сводится к виду ($k = k_\perp$, $k_z = 0$):

$$\left(k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-1}}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^{-3}}{\omega^2}\right) = \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2 \gamma^{-1} k_\perp^2 u^2}{\omega^4 c^2}. \quad (320)$$

В пределе низких частот, $\omega^2 \ll \omega_{Le}^2 \gamma^{-3}$ это уравнение имеет решение, соответствующее аperiодически нарастающим колебаниям с

$$\omega^2 = -\frac{\omega_{Li}^2 k_\perp^2 u^2 \gamma^2}{k_\perp^2 c^2 + \omega_{Le}^2 \gamma^{-1}} \lesssim -\omega_{Li}^2 \frac{u^2}{c^2} \gamma^2. \quad (321)$$

Эта неустойчивость ограничивает поперечные размеры токовой плазмы снизу. В этом можно убедиться, если заметить, что верхняя оценка инкремента (321) сохраняет силу и при $\omega \ll kv_{Te}$, лишь бы выполнялось условие $\omega \gg kv_{Ti}$ (в случае неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$ необходимо, чтобы $\omega \gg kv_s$). Это означает

$$\omega_{Li}^2 \frac{u^2}{c^2} \gamma^2 > \frac{1}{L_\perp} (v_s^2 + v_{Ti}^2), \quad (322)$$

что эквивалентно требованию превышения давления магнитного поля тока на длине L_\perp над газокинетическим давлением. Отсюда сразу проясняется физическая природа неустойчивости: плазме с током при достаточно большом поперечном размере выгодно расслоиться на отдельные токовые слои (либо струи), размеры которых определяются условием самосжатия (пинчевания). Характерное время развития неустойчивости (321) подтверждает эту картину. Действительно это время (обратный инкремент) есть ничто иное, как время инерциального сжатия токового слоя под действием магнитного поля. Об этом свидетельствует также и обобщение формулы (321) на случай $\omega < \nu_i$, когда существенным становится трение ионов, и вместо инерционного сжатия имеем сжатие при наличии трения, а поэтому

$$\omega = i \frac{\omega_{Li}^2 u^2}{\nu_i c^2} \gamma^2. \quad (323)$$

Рассмотренная поперечная структуризация токовой плазмы иногда называют также перезамыканием силовых линий магнитного поля тока толстого слоя плазмы. При наличии внешнего сильного магнитного поля неустойчивость расслоения развиваться не может.

в) *Ионно-звуковая неустойчивость*. Выше, по существу, мы уже коснулись низкочастотной неустойчивости токовой плазмы, заметив, что расслоение может существовать и в низкочастотной области $\omega < kv_{Te}$. Это относилось к поперечной

неустойчивости. Покажем теперь, что низкочастотной может быть и черенковская неустойчивость в токовой плазме. Предполагая $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$ и ограничиваясь поэтому потенциальным приближением из уравнения (305), имеем

$$1 + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{kv_{Te}} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0. \quad (324)$$

Учитывая малость мнимой части находим ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{1 + \omega_{Le}^2/k^2 v_{Te}^2}, \quad \frac{\delta}{\omega} = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Te}^3} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}}{\omega} \right). \quad (325)$$

Отсюда видим, что неустойчивость имеет место в условиях, когда черенковская диссипация ионно-звуковых волн вследствие эффекта Доплера меняет знак, и затухание сменяется раскачкой. Очевидно, что это происходит, когда токовая скорость превосходит фазовую скорость ионно-звуковой волны, что и определяет критический ток возбуждения ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$.

Плазма в сильном однородном СВЧ поле

Рассмотрим теперь плазму в сильном однородном СВЧ поле

$$\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega_0 t).$$

Мы уже знаем из линейной теории, что СВЧ поле при $\omega_0 \gg \omega_{Le}, \Omega_e$, строго говоря, всегда неоднородно в пространстве, и эта неоднородность характеризуется волновым вектором \mathbf{k}_0 , причем

$$k_0^2 \approx \frac{\omega_0^2}{c^2} \varepsilon(\omega_0) \approx \frac{\omega_0}{c}. \quad (326)$$

Поэтому величина $k_0 \approx \omega_0/c$. Это значит, что СВЧ поле можно считать однородным только в том случае, когда мы интересуемся колебаниями плазмы с $k \gg k_0$. Поскольку ниже будет показано, что наиболее интересные эффекты возникают в области длин волн $\lambda \sim 1/k \geq r_{De}$, то запас точности приближения определяется отношением $k/k_0 \sim c/v_{Te} \gg 1$.

Равновесная функция распределения электронов — в первую очередь только они реагируют на СВЧ поле — определяется уравнением Власова

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial t} + e \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (327)$$

и имеет вид

$$f_{0e} = f_{0e}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0(t)) = \frac{N}{(2\pi m T_e)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0(t))^2}{2T_e} \right\}. \quad (328)$$

где $\mathbf{p}_0(t) = -\frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t$. В рассматриваемом ниже нерелятивистском случае $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0(t)$. Действием СВЧ поля на ионы плазмы пренебрегаем, считая их распределенными по Максвеллу.

Приступим теперь к исследованию устойчивости рассматриваемого равновесного состояния. Мы уже не можем воспользоваться простым преобразованием Лоренца, поскольку направленная скорость электронов осциллирует во времени, а это означает переход в осциллирующую, неинерциальную систему отсчета, что потребует использования законов преобразования общей теории относительности. Намного проще задачу решать непосредственно, рассматривая малые отклонения распределений от равновесных δf_e и δf_i , которые очевидно удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_e}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}\delta f_e + e\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + \\ + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (329) \\ \frac{\partial \delta f_i}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}\delta f_e + e\mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial \delta f_e}{\partial \mathbf{p}} + \frac{e_i}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial \delta f_i}{\partial \mathbf{p}} + e_i \mathbf{E} \frac{\partial f_{0i}}{\partial \mathbf{p}} = 0. \end{aligned}$$

Эту систему дополняем уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum e \int \delta f \mathbf{v} d\mathbf{p}. \quad (330)$$

Уравнения (329) и (330) образуют замкнутую систему дифференциальных по времени уравнений с периодическими коэффициентами. Это позволяет искать решения в виде рядов по гармоникам $\exp(in\omega_0 t)$ т. е. представить их в виде

$$\begin{aligned} \psi_e = \exp \left\{ -i \frac{e \mathbf{k} \mathbf{E}_0}{m \sin} \omega_0 t \right\} \omega_0^2 \delta f_e \left(\mathbf{p} + \frac{e\mathbf{E}_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right), \\ (\psi_e, \delta f_i) = e^{-i\omega t} \sum_n e^{-in\omega_0 t} (\psi_{en}, \delta f_{in}). \quad (331) \end{aligned}$$

В результате из (329) получаем бесконечную систему зацепляющихся алгебраических уравнений, условие разрешимости которых при $\omega_0 \gg \omega_{Le}, \Omega_e$ сводится к виду (здесь мы опускаем подробности вычислений, которые можно найти в любом учебнике по электродинамике плазмы)

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^l(\omega, k)}{\delta \varepsilon_i^l(\omega, k)[1 + \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)]} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v}_E)^2}{\omega_0^2} - \\ - \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{v}_E]^2}{k^2 c^2} \frac{\delta \varepsilon_e^l(\omega, k)}{1 + \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)} = 0. \quad (332) \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon^l = 1 + \delta \varepsilon_e^l + \delta \varepsilon_i^l$ причем $\delta \varepsilon_e^l, \delta \varepsilon_i^l$ — парциальные продольные диэлектрической проницаемости. Кроме указанных выше ограничений мы также предположили, что $(\mathbf{k}\mathbf{v}_E)/\omega_0 \equiv (\mathbf{k}\mathbf{r}_E) \ll 1$ и поэтому учли только квадратичные члены по степеням амплитуды СВЧ поля.

Приступая к анализу уравнения (332), заметим, что второе слагаемое всегда больше третьего и поэтому достаточно ограничиться только учетом этого “нелинейного” слагаемого. При этом можно показать, что в этом пределе колебания чисто потенциальны ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) и всегда устойчивы. В этом случае есть один интересный момент — появляется новая ветвь колебаний, обусловленная осцилляцией электронов, что проявляется в виде “теплового” движения электронов и меняет характер ионно-звуковых колебаний. Так, например, в отсутствие внешнего магнитного поля $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$ находим

$$\omega^2 = (\mathbf{k}\mathbf{v}_E)^2 \frac{\omega_{Li}^2}{2\omega_0^2} + k^2 v_s^2, \quad \delta = -\omega \sqrt{\frac{\pi m}{8 M}}. \quad (333)$$

При $v_E \frac{\omega_{Li}}{\omega_0} \gg v_s$ (что возможно только при $v_E \gg v_{Te}$) спектр полностью определяется внешних СВЧ полем. В этих условиях говорят об электрорезонансной волне.

Как уже отмечали, третье слагаемое в (332) становится важным только при $\mathbf{k}\mathbf{v}_E = 0$, когда это уравнение принимает вид

$$\varepsilon^l(\omega, k) = \frac{1}{2} \frac{v_E^2}{c^2} \delta\varepsilon_e^l(\omega, k) \delta\varepsilon_i^l(\omega, k) = 0. \quad (334)$$

Это уравнение обладает неустойчивыми корнями, Здесь мы приведем два примера таких решений: для “холодной” изотропной бесстолкновительной плазмы, когда $\omega \gg kv_{Ti}$

$$\omega^2 = -\omega_{Li}^2 \frac{v_E^2}{2c^2}, \quad (335)$$

и для сильностолкновительной плазмы в диффузионной области частот $\omega \ll \nu_i$

$$\omega = -ik^2 \frac{v_{Ti}^2 + v_s^2}{\nu_i} + i \frac{\omega_{Li}^2}{\nu_i} \frac{v_E^2}{2c^2}. \quad (336)$$

Видно, что в первом случае неустойчивость имеет место при условии $v_E^2/2c^2 \gg k^2 r_{Di}^2$, а во втором при $v_E^2/2c^2 > k^2 (r_{De}^2 + r_{Di}^2)$ где $k \sim 1/L_\perp$. Сравнивая (335) и (336) с (321) и (323), мы видим аналогию рассмотренной неустойчивости плазмы в СВЧ поле с поперечными неустойчивостями токовой плазмы. Исходя из этой аналогии часто обе неустойчивости называют неустойчивостями, обусловленными анизотропией функции распределения электронов, в одном случае из-за токового дрейфа электронов, а во втором из-за осцилляции электронов в СВЧ поле. Очевидно в обоих случаях мы имеем дело с поперечной филаментацией или расслоением плазмы.

Мы здесь ограничились рассмотрением только случая, когда $\omega_0 \gg \omega_{Le}, \Omega_e$. Если ω_0 становится близкой к собственным частотам плазмы, то возникают резонансные и параметрические эффекты, которые будут рассмотрены в последующих главах по теории нелинейных колебаний плазмы.

Лекция 11.

Пучковая неустойчивость

Вынужденное черенковское излучение

В этой главе мы рассмотрим неравновесную плазму, состоящую из покоящейся плазмы и направленного плотного пучка моноэнергетических электронов. Совершенно очевидно, что такая система неустойчива и, согласно уравнению Власова, неустойчива по отношению к возбуждению (усилению) электромагнитного излучения. Избыточная энергия преобразуется в энергию излучения, и поскольку пучок считаем моноэнергетическим (или почти моноэнергетическим), то можно ожидать возбуждения когерентного монохроматического излучения.

В связи с когерентностью здесь уместно дать несколько иное толкование рассматриваемым ниже явлениям. Известно, что быстро движущаяся заряженная частица (электрон) в среде (плазма) может излучать. Излучение одной частицы называют спонтанным излучением, и пока частица излучает его интенсивность, очевидно, линейно растет со временем. Однако если в среде движется не одна частица, а целый поток одинаковых или почти одинаковых частиц, то излучение одной частицы может играть роль катализатора для другой частицы, и вероятность излучения последней возрастает. Более того, поскольку частицы одинаковы они будут излучать одинаковое излучение, или, другими словами, излучение приобретет вынужденный характер и станет когерентным. В результате его интенсивность будет экспоненциально расти со временем, что свидетельствует об излучательной неустойчивости системы. Это явление, играющее огромное прикладное значение как основа всех современных источников когерентного электромагнитного излучения, и будет изучаться ниже. При этом мы ограничимся только теорией вынужденного черенковского излучения плотных прямолинейных электронных пучков в плазме, составляющей основу мощных плазменных источников СВЧ. Однако прежде надо рассмотреть спонтанное черенковское излучение одного электрона, движущегося равномерно и прямолинейно.

1. *Спонтанное черенковское излучение.* Для того чтобы понять природу спонтанного черенковского излучения и получить условия его существования, рассмотрим простейший случай равномерного и прямолинейного движения одного электрона в неограниченной среде, плотности тока и заряда которого даются выражениями

$$\mathbf{j} = e u \mathbf{i}_z \delta(z - ut) \delta(\mathbf{r}_\perp), \quad \rho = e \delta(z - ut) \delta(\mathbf{r}_\perp). \quad (337)$$

Мы считаем, что скорость \mathbf{u} постоянна и направлена вдоль оси OZ , а электрон точечный.

Известно, что при прямолинейном и равномерном движении электрон может излучать электромагнитную волну, которую мы представим в виде плоской монохроматической бегущей волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi). \quad (338)$$

При этом излучение есть не что иное, как работа поля волны над движущимся электроном, которая, согласно закону Джоуля–Ленца, определяется формулой

$$\begin{aligned} A_T = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d\mathbf{r} \mathbf{j}\mathbf{E} &= e \int_{-T/2}^{T/2} dt u E_{\parallel}(z, t) \Big|_{z=ut} \rightarrow \\ &\rightarrow \pi e E_{\parallel} u \sin \varphi \delta(\omega - k_{\parallel} u). \end{aligned} \quad (339)$$

Здесь φ — начальная фаза поля, \mathbf{k} — полный волновой вектор поля волны с частотой ω , и k_{\parallel} — параллельные (вдоль OZ) компоненты векторов \mathbf{k} и \mathbf{E} .

Из (338) следует очень важный вывод: излучение электрона за достаточно длительное время $T \rightarrow \infty$) возможно только при выполнении условия

$$\omega = k_{\parallel} u = \omega(\mathbf{k}). \quad (340)$$

Таким образом, черенковское “излучение” свободно движущимся электроном возможно, если в среде существует медленная волна $\omega(\mathbf{k})$ и выполняется резонансное условие — фазовая скорость волны в направлении движения электрона совпадает со скоростью последней.

Слово “излучение” мы не случайно поместили в кавычки. В действительности знак работы A_{∞} зависит от знака $\sin \varphi$ — при $\sin \varphi > 0$ работа $A_{\infty} > 0$, т. е. имеет место излучение, а при $\sin \varphi < 0$ напротив происходит поглощение излучения электроном и его ускорение.

Рассмотренное выше явление излучения (поглощения) электромагнитной волны равномерно движущимся электроном и есть явление спонтанного излучения (поглощения). Оно определяется заданным движением электрона, влиянием поля излучения на движение пренебрегается. Именно в этом и заключается основная сущность спонтанности процесса. Величина (339) определяет полную интенсивность излучения, либо поглощения. При этом весьма важно отметить, что если отвлечься от фазы влета φ , то вероятности излучения и поглощения равны между собой. Начальная фаза φ играет существенную роль, ее подбором можно реализовать излучены волны ($\sin \varphi > 0$), либо ее поглощение ($\sin \varphi < 0$) и, как следствие, ускорение электрона полем волны.

Если у нас не один электрон, а целый пучок электронов, то выражение (339) следует просуммировать по всем электронам пучка на единицу его длины

$$A_\infty = \pi e u E_{\parallel} \delta(\omega - k_{\parallel} u) \sum_j \sin \varphi_j = 0. \quad (341)$$

Последнее равенство следует из равномерности электронов пучка по фазам их влета в поле φ_j . Таким образом, пучок электронов с равномерно распределенной плотностью по длине спонтанно излучать не может, вследствие интерференции излучений отдельных электронов происходит полное гашение излучения.

2. *Вынужденное черенковское излучение.* До сих пор мы не учитывали действие излучения на движение электрона как излучателя. Оно может оказаться существенным если, например, приведет к такому изменению движения, при котором вероятность излучения возрастет. В этом случае излучение первого электрона пучка может способствовать более интенсивному излучению второго, потом третьего и т.д. В результате, излучение пучка из спонтанного перейдет в вынужденное, значительно более эффективное. Очевидно, что такое вынужденное излучение возможно только в пучке электронов, либо в любом другом ансамбле электронов и не присуще одному электрону. В случае одного электрона о вынужденном излучении можно говорить, если в среде изначально присутствует излучение, которое действует на движение излучающего электрона и меняет характер его движения.

Для того чтобы учесть такое воздействие, для простоты рассмотрим одномерное движение электрона в очень сильном продольном магнитном поле. Такое движение в поле электромагнитной волны записывается в виде

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{e\beta}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} E_{\parallel}(z, t). \quad (342)$$

Здесь $E_{\parallel}(r, t)$ — продольная компонента поля излучаемой волны

$$E_{\parallel}(z, t) = \frac{1}{2} \{ E_{\parallel}(r, t) e^{-i\omega t + ik_{\parallel} z} + \text{к.с.} \}, \quad (343)$$

причем $E_{\parallel}(r, t)$ — ее амплитуда. Отметим, что вследствие одномерного приближения в уравнении движения (342) фигурирует только продольная компонента поля волны. Величина $\beta < 1$ — характеризует связь электрона с полем волны и определяется местоположением электрона (либо тонкого в поперечном направлении пучка) по отношению к структуре поля волны. Запись поля в виде (343) диктуется нелинейностью системы уравнений (342), а поскольку эта система описывает вынужденное излучение электрона, то последнее следует считать нелинейным явлением.

Решаем систему (343) методом последовательных приближений по степеням поля с точностью до второй степени поля:

$$z = z_0 + \delta z(E_{\parallel}), \quad z_0 = u(t - t_0), \quad (344)$$

При этом полагаем $E_{\parallel} \rightarrow 0$ при $t = t_0 \rightarrow -\infty$ (адиабатическое включение поля в бесконечном прошлом). Переходя от одного электрона к пучку электронов путем усреднения по начальным фазам и считая $\omega \rightarrow \omega + i\delta\omega$, где $\delta\omega \ll \omega$, после несложных вычислений, получим для импульса поля волны

$$P = \alpha \frac{k_{\parallel} |E_{\parallel}|^2}{\omega 8\pi}, \quad (345)$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\beta^2 \omega \delta\omega \omega_0^2 (\omega - k_{\parallel} u)}{\alpha \gamma [(\omega - k_{\parallel} u)^2 + \delta\omega^2]^2} P = 2\pi \delta\omega P.$$

Здесь $\gamma = \sqrt{(1 - u^2/c^2)^{-1/2}}$, а α — параметр, зависящий от структуры поля волны, связывающий полную плотность энергии поля с величиной $|E_{\parallel}|^2$. Согласно закону сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}(P + P_e) = 0, \quad P_e = mn_b \left\langle v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right\rangle, \quad (346)$$

причем n_b — плотность электронов пучка, а $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_b / m}$ — ленгмюровская частота.

Из формул (345) следует, что в условиях $\delta\omega > 0$ импульс поля (а следовательно, и само поле) экспоненциально растет со временем, что является следствием вынужденного черенковского излучения электронов пучка. Максимум инкремента нарастания поля $\delta\omega$ достигается в условиях

$$\omega = k_{\parallel} u - \frac{\delta\omega}{\sqrt{3}}, \quad \delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\beta^2 \omega \omega_b^2}{\alpha 2\gamma^3} \right)^{1/3}. \quad (347)$$

Поскольку $\delta\omega \ll \omega$ условие вынужденного излучения (347) практически совпадает с условием спонтанного излучения (340).

Выше мы рассмотрим вынужденное излучение пучка электронов, пренебрегая внутренней связью между электронами пучка и считая их взаимодействующими только с полем излучения. В действительности пучок, благодаря кулоновскому взаимодействию между электронами, представляет собой некоторую колебательную систему, и поэтому кроме взаимодействия с полем, как это сделано в уравнениях (342), следует учитывать их взаимодействие между собой посредством самосогласованного кулоновского поля, или другими словами, коллективные колебания. Запишем соответствующие уравнения в виде

$$\frac{dz}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} + \Omega_b^2(z - z_0) = \frac{e\beta}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} E_{\parallel}(z, t). \quad (348)$$

Здесь Ω_b — частота собственных коллективных колебаний электронов пучка. Она определяется дисперсионным уравнением для продольных колебаний пучка как чисто электронной плазмы с отличной от нуля продольной направленной скоростью

$$1 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3(\omega - k_{\parallel}u)^2} = 0. \quad (349)$$

Отсюда с учетом эффекта Доплера находим эту частоту $\Omega_b = \omega_b/\gamma^{3/2}$. Решая систему (348) подобно (342) методом последовательных приближений, окончательно вместо (345) получаем

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\beta^2}{\alpha\gamma^3} \frac{\omega\delta\omega\omega_b^2(\omega - k_{\parallel}u)}{[(\omega - k_{\parallel}u)^2 - \omega_b^2 - \delta\omega^2]^2 + 4(\omega - k_{\parallel}u)^2\delta\omega^2} P. \quad (350)$$

При $\delta\omega \gg \Omega_b$ уравнение (350) переходит в (345), что и определяет применимость формул (347). В обратном же пределе, когда $\delta\omega \ll \Omega_b$ из (350) получаем иное условие вынужденного черенковского излучения и максимальный инкремент, который меньше, чем (347):

$$\omega = k_{\parallel}u - \Omega_b, \quad \delta\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega\omega_b^2\beta^2}{2\alpha\gamma^3\Omega_b} \right)^{1/2}. \quad (351)$$

В отличие от (347) в рассматриваемом случае инкремент нарастания поля излучения меньше собственной частоты коллективных колебаний электронов и поэтому этот режим называется коллективным вынужденным излучением, в то время как в условиях (347) излучение следует считать одночастичным вынужденным процессом. В литературе часто эти два предела вынужденного черенковского излучения называют рамановским и томсоновским (комптоновским) режимами соответственно.

Дисперсионное уравнение для вынужденного черенковского излучения электронов в замагниченной плазме

1. *Случай моноэнергетического пучка.* До сих пор вынужденное черенковское излучение мы описывали микроскопически, исходя из движения отдельных электронов в поле излучения. Однако, выше уже упоминалось, что это явление описывает излучательную неустойчивость пучка электронов в среде, в которой существуют волны с фазовой скоростью меньше скорости света в вакууме, и может выполняться условие черенковского излучения (340). Поэтому его можно описывать в рамках макроскопической электродинамики материальных сред. Ниже мы это продемонстрируем на примере сильнозамагниченной плазма-пучковой системы, причем плазму считаем неограниченной в пространстве, а пучок — бесконечно

тонким. Этот пример, кроме демонстрации сказанного выше, облегчит понимание последующих разделов. Диэлектрическая проницаемость замагниченной плазмы представляет собой анизотропный тензор вида

$$\varepsilon_{ij}^p(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}. \quad (352)$$

Рассмотрим в начале спектры собственных частот самой замагниченной плазмы в отсутствие пучка. Дисперсионное уравнение колебаний при учете (352) записывается в виде

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| \rightarrow k_{\perp}^2 c^2 + (k_{\parallel}^2 c^2 - \omega^2) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (353)$$

Здесь k_{\perp} — поперечное волновое число, характеризующее поперечную неоднородность поля волны. Уравнение (347) определяет две ветви колебаний плазмы, спектры которых при заданном k_{\perp} представлены на рис. 8⁵:

$$\omega_{1,2}^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left\{ \omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + k^2 c^2)^2 - 4k_{\parallel}^2 c^2 \omega_{Le}^2} \right\}, \quad (354)$$

где $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2$. Первое решение соответствует быстрой волне с $\omega > k_{\parallel} c$, а второе — медленной с $\omega < k_{\parallel} c$.

Очевидно, черенковское возбуждение электронным пучком возможно лишь в случае медленной волны. Имея это в виду и рассматривая бесконечно тонкий локализованный на $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp b}$ пучок как малое возмущение, из уравнений Максвелла легко находим поправку в дисперсионном уравнении колебаний. В результате это уравнение удобно записать в виде

$$[\omega^2 - \omega_1^2(\mathbf{k})][\omega^2 - \omega_2^2(\mathbf{k})] \left[(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \frac{\omega_b^2}{\gamma^3} \right] = \frac{\beta^2 \omega_b^2}{\alpha \gamma^3}. \quad (355)$$

Величины α и β были определены выше.

Уравнение (355) описывает три связанных между собой осциллятора, причем левая часть описывает их спектры в отсутствие связи, а правая часть — связь (или взаимодействие) этих осцилляторов между собой. Первые два осциллятора $\omega_{1,2}(\mathbf{k})$ были обсуждены выше, а третий — это по сути коллективные колебания электронов пучка, которые описываются уравнением (349):

$$\omega_{3,4}(\mathbf{k}) = k_{\parallel} u \pm \frac{\omega_b}{\gamma^{3/2}}. \quad (356)$$

⁵ Ссылку на этот рисунок мы дали умышленно, подчеркивая тем самым, что соотношения (354) при $k_{\perp} = \mu_{ls}/R$ совпадают с решениями уравнения (265), полученного для сильно замагниченного плазменного волновода.

Очевидно, что происходит пересечение только кривых $\omega_2(\mathbf{k})$ и $\omega_4(\mathbf{k})$, описывающих медленные плазменную и пучковые волны. В точке пересечения $(\omega_{\text{res}}, k_{\parallel\text{res}})$ благодаря связи волн происходит перекачка энергий от медленной пучковой волны с избыточной энергией в медленную плазменную волну, которая и нарастает во времени. Другими словами эта перекачка, или неустойчивость и есть вынужденное черенковское излучение электронным пучком медленной плазменной волны.

Нам остается лишь отметить, что решения уравнения (355), определяющие частоту излучаемой волны ($\text{Re } \omega_{\text{res}}$), инкремент ее нарастания ($\text{Im } \omega_{\text{res}}$) и условия излучения, (связь между ω_{res} и k_{res}) естественно совпадают с (347) и (351) для вынужденного одночастичного и коллективного механизмов излучения.

2. *Случай “горячего” пучка.* До сих пор мы исследовали взаимодействие моноэнергетического электронного пучка с плазмой. Покажем теперь что вынужденное черенковское излучение имеет место и в случае сильно размытого по скоростям пучка, и что неустойчивость, возникающая при этом, есть затухание Ландау с обратным знаком. Оно становится отрицательным и соответствует не поглощению, а излучению волн в области фазовых скоростей, в которой функция распределения электронов по скоростям имеет положительную производную. В отличие от рассмотренных выше неустойчивостей моноэнергетического пучка в плазме, известных как гидродинамические неустойчивости, рассмотренная ниже неустойчивость сильно размытого по скоростям пучка известна как кинетическая неустойчивость. Она не имеет такого прикладного значения, как гидродинамическая, разве только для нагрева электронов плазмы. Поэтому ниже мы рассмотрим ее на простейшей одномерной модели однородного в пространстве нерелятивистского пучка, что позволит использовать потенциальное приближение для поля колебаний.

В потенциальном приближении колебания плазма-пучковой системы описываются продольной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p}. \quad (357)$$

Здесь $\alpha = e, b$, т. е. соответствует электронам плазмы, которую считаем “холодной” (поскольку интересуемся волнами с $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} \gg kv_{Te}$) и пучку, который, напротив, считаем размытым, а следовательно, очень горячим. В случае максвелловского распределения электронов пучка с направленной скоростью u из (357) имеем

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_{Tb}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Tb}} \right) \right]. \quad (358)$$

Здесь v_{Tb} — тепловая скорость (разброс по скоростям) электронов пучка.

При $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} \gg kv_{Tb}$ уравнение приобретает вид

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0, \quad (359)$$

что при $k_{\perp} = 0$ соответствует рассмотренному выше вынужденному черенковскому излучению продольных волн нерелятивистским электронным пучком. В этом случае ($\beta = \alpha = 1$) режим излучения томсоновский с инкрементом (347). Отсюда находим условие применимости пренебрежения тепловым разбросом пучка, или, что то же, условие применимости гидродинамического приближения

$$\left(\frac{\omega_b^2}{2\omega_{Le}^2}\right)^{1/3} ku \gg kv_{Tb} \rightarrow \frac{u}{v_{Tb}} \gg \left(\frac{n_b}{2n_e}\right)^{1/3}. \quad (360)$$

В противоположном пределе тепловой разброс электронов пучка становится существенным и уравнение (358) приобретает вид

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_b^2(\omega - ku)}{kv_{Tb}} = 0. \quad (361)$$

Отсюда мы находим частоту и инкремент нарастания неустойчивости ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2, \quad \delta = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_b^2(\omega - ku)}{\omega kv_{Tb}}. \quad (362)$$

Неустойчивость имеет место при $ku > \omega$, причем она связана с обращением знака затухания Ландау при наличии “горячего” электронного пучка, или, что то же самое, с вынужденным черенковским излучением такого пучка. Эта неустойчивость в отличие от рассмотренной выше называется кинетической.

Лекция 12.

Взаимодействие волн в плазме

Нелинейное взаимодействие волн в плазме

Современная нелинейная электродинамика плазмы развивается в 2-х направлениях: а) построение теории нелинейной диэлектрической проницаемости (нелинейный закон Ома) на основе решения кинетических уравнений методом разложения по степеням электромагнитного поля, с последующим решением укороченных (оборванных на некоторой степени поля) уравнений и б) точный учет линейного поглощения поля в плазме и сопровождающего это явление изменений равновесной функции распределения либо равновесных параметров с самосогласованным анализом линейных свойств в новом состоянии. Первое направление известно как теория нелинейного взаимодействия волн в плазме, а вторая — как квазилинейная теория колебаний и волн.

Естественно, нелинейная электродинамика плазмы должна учитывать как эффекты нелинейного взаимодействия волн, так и эффекты квазилинейной релаксации. Однако одновременно это сделать сложно, и поэтому их рассматривают отдельно и сравнивают времена их проявления, определяя доминирующую роль каждого из них.

В настоящем разделе мы начинаем излагать основы первого направления в нелинейной электродинамике плазмы. Как обычно, исходим из уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (363)$$

представляя f в виде разложения

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots, \quad (364)$$

где $f_n \sim E^n$, а f_0 равновесное однородное распределение Максвелла. Для простоты ограничимся рассмотрением изотропной плазмы в отсутствие внешних полей. Тогда из (363) и (364) получаем

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{r}} + e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (365)$$

Разложим все $f_n(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ в интегралы Фурье

$$A(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

В результате из (365) $f_n(\omega, \mathbf{k})$ выражаем через $f_{n-1}(\omega, \mathbf{k})$ и т.д. $f_1(\omega, \mathbf{k})$ через f_0 .
Найдя затем индуцированный ток в виде ряда по степеням поля

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{p} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{j}_2 + \dots + \mathbf{J}_n + \dots, \quad (366)$$

а вместе с ним нелинейный закон индукции

$$\begin{aligned} D_i(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_{n-1} \times \\ &\times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \dots \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ &\times E_{j_1}(\omega - \omega_1, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \dots E_{j_n}(\omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}). \end{aligned} \quad (367)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ известный тензор диэлектрической проницаемости второго ранга, а $\varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1; \dots)$ — многоиндексные тензоры

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega, \mathbf{k}; \omega_1, \mathbf{k}_1, \dots \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) &= \\ &= \delta_{n1} \delta_{ij_1} - 4\pi(-ie)^{n-1} \int d\mathbf{p} \frac{v_i}{\omega} g \hat{\Gamma}_{j_1} \dots g_n \hat{\Gamma}_{j_n}, \end{aligned} \quad (368)$$

где

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad g_n = \frac{1}{\omega_n - \mathbf{k}_n\mathbf{v}}, \\ \hat{\Gamma}_{j_n} &= \frac{1}{\omega_{n-1} - \omega_n} \times \\ &\times \left[(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n-1})_{j_n} v_j + \delta_{j_n j} (\omega_n - \omega_{n-1} - \mathbf{v}(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n-1})) \right] \frac{\partial}{\partial p_j}. \end{aligned} \quad (369)$$

Как отмечалось, соотношение (367) является точным. Дальнейшее упрощение связано с обрыванием ряда на каком-либо $n > 2$. Естественно самым низким нелинейным приближением является так называемое трехволновое приближение, когда в правой части (367) учитывают члены только до кубического включительно. При этом важную роль играет линейное приближение, которое приводит к условию существованию ненулевых решений в виде плоских монохроматических волн,

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0. \quad (370)$$

Это уравнение определяет всевозможные волны в среде и их закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. При учете нелинейных членов в соотношении (367) появляются нелинейные и комбинационные гармоники линейных волн, что приводит к слабой зависимости от времени амплитуд этих волн, т. е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}, t) e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (371)$$

Уравнение для этих амплитуд ищется исходя из (367) и закона сохранения энергии

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (372)$$

Кроме того, в предположении случайных фаз полей приводится усреднение

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}, t) \rangle &= 0, \\ \langle E_i(\omega, \mathbf{k}) E_j^*(\omega_1, \mathbf{k}_1) \rangle &= \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1), \\ W(\omega, \mathbf{k}) &\equiv \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} [M_{ij}^e \cdot \omega] \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}, \\ M_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \end{aligned} \quad (373)$$

Коррелятор 4-го порядка выражается как произведение корреляторов второго порядка (373). В результате в 3-х волновом приближении получается довольно громоздкое уравнение для $\langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$, которое ниже представлено только схематически:

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega M_{ij}^e(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t} \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \right] &= 2i \varepsilon_{ij}^a(\omega, \mathbf{k}) \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} + \\ &+ \int d\omega' d\mathbf{k}' \left\{ Q_{1ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E_i E_j \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \langle E_\mu E_\nu \rangle_{\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'} + \right. \\ &\left. + Q_{2ij\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}; \omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k}) \langle E_i E_j \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \langle E_\mu E_\nu \rangle_{\omega', \mathbf{k}'} \right\}. \end{aligned} \quad (374)$$

Ядра этого интегрального уравнения $Q_{1ij\mu\nu}$, $Q_{2ij\mu\nu}$ являются сложными функциями параметров плазмы и имеют громоздкий вид. Мы их здесь не будем выписывать, отметим только, что они пропорциональны обратному тензору M_{ij}^{-1} , а поэтому их полюса соответствуют собственным линейным волнам, зависимость их амплитуд от времени как раз и учитывает левая часть уравнения (374). Первое же слагаемое в правой части учитывает линейное затухание, обусловленное мнимой частью линейной диэлектрической проницаемости; оно же определяет порог развития нелинейных процессов, обусловленных вторыми и третьим слагаемыми,

Уравнение (374) описывает все многообразие 3-х волновых процессов в плазме. Естественно, мы здесь не будем даже перечислять все возможные процессы. Рассмотрим только некоторые, наиболее важные в прикладном отношении. Все эти случаи к тому же наиболее просты для анализа, поскольку в них одна волна считается заданной. При этом уравнение (374) сводится к линейному уравнению, описывающему раскачку в плазме волн под действием падающей заданной волны. Следовательно, решение этого уравнения сводится к анализу дисперсионного уравнения возбуждения в плазме волн при взаимодействии с заданной нелинейной волной.

Параметрическая раскачка плазменных колебаний в плазме во внешнем однородном СВЧ электрическом поле

Рассмотрим плазму во внешнем однородном СВЧ поле

$$\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t. \quad (375)$$

Эту задачу мы уже анализировали в § , где однако предполагалось, что $\omega_0 \gg \omega_{Le}, \Omega_e$. Сейчас же мы считаем $\omega_0 \simeq \omega_{Le}, \Omega_e$, и тем самым допускаем возможность резонансного возбуждения в плазме собственных колебаний и их комбинационных гармоник. Единственным ограничением является относительная малость амплитуды \mathbf{E}_0 , что позволяет ограничиться только квадратичными членами по \mathbf{E}_0 . Это заложено в уравнении (374). Кроме того, для простоты и две другие волны будем считать продольными (СВЧ поле как однородное в пространстве, очевидно, является продольным). Таким образом, если говорить на языке взаимодействия волн, то мы рассматриваем 3-х волновые процессы с участием только продольных волн. В результате из (374) следует дисперсионное уравнение

$$\frac{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})[1 + \delta\varepsilon(\omega, \mathbf{k})]} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2}{4} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_0, \mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_0, \mathbf{k})} \right] = 0, \quad (376)$$

где $\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{v}_E}{\omega_0} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_0^2}$ — амплитуда осцилляции электрона в поле СВЧ волны, а $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$, где $\delta\varepsilon_{e,i}(\omega, \mathbf{k}) = k_i k_j \delta\varepsilon_{ij,e,i}/k^2$ — эффективные парциальные продольные диэлектрические проницаемости электронов и ионов.

Из уравнения (376) сразу же видно, что наиболее сильное воздействие СВЧ поле оказывает на плазму в условиях, когда одновременно выполняются соотношения

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad \varepsilon(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k}) = 0. \quad (377)$$

Это означает, что ω и $\omega \pm \omega_0$ одновременно являются собственными продольными колебаниями плазмы, т. е.

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (378)$$

где ω_0, ω_1 и ω_2 — частоты собственных колебаний. Это условие называется распадным.

Анализ распадных условий начнем с изотропной плазмы, в которой, как мы уже знаем, существуют только две ветви продольных колебаний — высокочастотная электронная ленгмюровская с $\omega_1 \simeq \omega_{Le}$ и низкочастотная ионно-звуковая

$\omega_2 \simeq kv_s$, существующая в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) в области частот $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$. Из уравнения (376) в этой области частот имеем

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} + \frac{k^2 v_s^2}{\omega_{Li}^2} \left(1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}}\right) - \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2} \frac{\Delta}{\Delta^2 - 4\omega^2/\omega_0^2} = 0, \quad (379)$$

где $\Delta = \left(\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} - 1\right)$ так называемая расстройка резонанса. Легко видеть, что решение уравнения (379) имеет вид

$$\omega_e \approx \omega_{Le} + kv_s = \omega_1 + \omega_2, \quad (380)$$

Отсюда следует, что в области $\omega_0 > \omega_{Le}$, т. е. в области прозрачности плазмы, $\delta > 0$, т. е. имеет место неустойчивость, соответствующая распаду СВЧ поля на электронные ленгмюровские и ионно-звуковые колебания при выполнении распадного условия (380). Очевидно, что такой распад возможен, если инкремент δ превосходит затухание ленгмюровских колебаний, равное $\sim \nu_e/2$, т. е.

$$\begin{aligned} \omega &= kv_s + i\delta = \omega_2 + i\delta, \\ \delta &= \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{16\omega^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{k^2 r_{Dr}^2} kv_{Te}. \end{aligned} \quad (381)$$

В магнитоактивной плазме число ветвей колебаний значительно больше. Более разнообразными оказываются и различные типы распадов. Ограничимся лишь демонстрацией одного такого распада. Именно, рассмотрим слабозамагниченную плазму, в которой $\omega_{Le,i}^2 \gg \Omega_{e,i}^2$. В такой плазме существуют две высокочастотные (электронные) ветви продольных колебаний

$$\omega_1^2 = \omega_{Le}^2, \quad \omega_2^2 = \Omega_e^2 \frac{k_z^2}{k^2} = \Omega_e^2 \cos^2 \theta, \quad (382)$$

где θ — угол между направлением распространения и магнитным полем (осью OZ). СВЧ поле с частотой $\omega_0 \simeq \omega_1 + \omega_2$ приводит к параметрической раскачке именно этих колебаний. В этом легко убедиться из дисперсионного соотношения

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{Li}^2} + i \frac{\omega_1}{2\delta} - \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{8} \frac{\omega_2(\omega_2^2 - \Omega_e^2)}{(\Delta + i\delta)\omega_1^2} = 0. \quad (383)$$

где $\omega = \omega_1 + i\delta$, а $\Delta = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$ — расстройка. При $\Delta \gg \delta$ получаем

$$\delta^2 = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{16} \frac{\Omega_e^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\omega_{Le}} = \frac{m}{M} \frac{\Delta \omega_{Le}}{2}. \quad (384)$$

Поскольку $\delta^2 > 0$, то система неустойчива. Порог неустойчивости при этом очевидно определяется из условия $\delta > \nu_e/2$, т. е. инкремент должен превосходить линейное затухание, обусловленное столкновениями.

Плазма в поле сильной электромагнитной волны. Вынужденное рассеяние волн в плазме

В предыдущем разделе мы рассмотрели задачу устойчивости плазмы в пространственно однородном СВЧ электрическом поле. Учтем теперь пространственную неоднородность, или конечную длину волны этого поля. Тем самым мы переходим к задаче об устойчивости плазмы в поле сильной электромагнитной волны, амплитуда которой считается заданной. Последнее облегчает рассмотрение задачи в рамках 3-х волнового приближения.

Из всех возможных 3-х волновых процессов мы ограничимся задачей рассеяния высокочастотной поперечной электромагнитной волны в изотропной плазме с возбуждением продольных плазменных колебаний, считая амплитуду падающей волны заданной. При этом из уравнения (374) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\varepsilon^l(\omega, k) + \frac{\delta\omega_e^l(\omega, k)}{4\omega_0^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \times \frac{k^2(\omega - \omega_0)^2[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \mathbf{v}_E]^2}{(\omega - \omega_0)^2\varepsilon^{\text{tr}}(\omega - \omega_0, k) - c^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} = 0. \quad (385)$$

При получении этого уравнения предполагалось, что частота падающей волны $\omega_0 \gg \omega, \omega_{Le} \gg kv_{Te}, \omega_{Li}$. Волна накачки с частотой ω_0 и рассеянная волна с частотой $\omega_s = \omega_0 - \omega$ считаются поперечными, т. е. $\mathbf{E}_s \perp (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, а $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}_0$, причем ω и \mathbf{k} частота и волновой вектор возбуждаемой в процессе рассеяния плазменной волны. В принятых выше ограничениях

$$\varepsilon^l(\omega, k) \approx 1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega, k) \approx 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon^{\text{tr}}(\omega_0 - \omega, k) \approx 1, \quad (386)$$

а уравнение (385) можно переписать в виде

$$(\omega^2 - \omega_{Le}^2)(\omega_s^2 - c^2k_s^2) = \frac{\omega_{Le}^2 k^2 v_E^2}{4}, \quad (387)$$

где $\omega_s = \omega_0 - \omega$, а $\mathbf{k}_s = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$, причем $\omega_0 \simeq ck_0$, а $\omega_s = ck_s$.

Теперь мы можем решить уравнение (387). Здесь следует различать два предельных случая: а) $\omega \gg \omega_{Le}$, называемый томсоновским рассеянием и б) $\delta \ll \omega_{Le}$, где $\delta \ll \omega_{Le}$, называемый рамановским рассеянием.

Для случая томсоновского рассеяния из (387) следует выражение для инкремента нарастания продольной волны

$$\text{Im } \omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}^2}{8\omega_0} \right)^{1/3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_0 \omega_{Le}^2 v_E^2}{2c^2} \right)^{1/3}. \quad (388)$$

Максимум инкремента достигается при $k = 2k_0 = 2\omega_0/c$, т. е. для. рассеяния назад. Из условия $\text{Im } \omega \gg \omega_{Le}$ находим условие применимости томсоновского приближения

$$\frac{v_E^2}{c^2} \gg \frac{\omega_{Le}}{\omega_0}, \quad (389)$$

которое можно считать также порогом рассматриваемого процесса.

При нарушении неравенства (389) процесс рассеяния меняет характер — из томсоновского он переходит в рамановский, когда $\omega = \omega_{Le} + i\delta$. Для δ при этом из (387) находим

$$\delta = \left(\frac{k^2 v_E^2 \omega_{Le}}{16\omega_0} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{v_E^2}{4c^2} \omega_0 \omega_{Le} \right)^{1/2}. \quad (390)$$

Здесь также максимум инкремента достигается для рассеяния назад, когда $k = 2k_0 = 2\omega/c$. Для рамановского рассеяния порог уже определяется столкновительным затуханием возбуждаемых плазменных волн и дается неравенством $\delta > \nu_e/2$, или

$$\frac{v_E^2}{2c^2} \omega_0 \omega_{Le} > \frac{\nu_e^2}{4}. \quad (391)$$

В заключение заметим, что полученные выше результаты легко обобщаются на случай рассеяния сильной электромагнитной волны на релятивистском электронном пучке. Электронный пучок — такая же электронная плазма, как и рассмотренная выше, в особенности, если перейти в движущуюся систему координат, связанную с пучком. Вместе с тем, эта задача имеет большое прикладное значение, поскольку при этом частота рассеянного излучения может значительно отличаться от частоты падающей волны. Так, при рассеянии назад, используя обычные формулы преобразования Лоренца, получаем, что

$$\omega_s = 4\gamma^2 \omega_0, \quad (392)$$

где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор энергии пучка. При $\gamma^2 \gg 1$ получаем значительное преобразование частоты и даже переход из СВЧ области ($\omega_0 \simeq 10^{10} - 10^{11} \text{ с}^{-1}$) в оптическую ($\omega_s \simeq 10^{14} - 10^{15} \text{ с}^{-1}$). Процесс рассеяния на релятивистском пучке с возбуждением пучковых ленгмюровских колебаний используется в лазере на свободных электронах (ЛСЭ).

Дисперсионное уравнение для ЛСЭ получается из (385) простой замены ω и \mathbf{k} на их лоренцовские аналоги ω' и \mathbf{k}' , которые уже выписывались в § , что является следствием перехода в движущуюся систему пучка. Поэтому формулы для частот и инкрементов нарастания волн в этой системе легко получаются из полученных выше с помощью замены $\omega \rightarrow \omega'$ и $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ (при этом надо еще учитывать преобразование плазменной частоты $\omega_{Le}^2 \rightarrow \omega_{Le}^2/\gamma$). Обратный переход в лабораторную

систему не представляет труда и приводит

$$\delta \approx 2\delta', \quad (393)$$

где δ' — инкремент в движущейся системе.

Лекция 13.

Нелинейные явления в плазме

Квазилинейная теория колебаний плазмы

Выше мы рассмотрели нелинейные явления в плазме при неизменном равновесном состоянии $f_0(p)$. К таким явлениям относятся нелинейное взаимодействие волн, вынужденное рассеяние с возбуждением плазменных колебаний и комбинационных гармоник. Ниже же мы рассмотрим, напротив, изменение основного состояния в результате поглощения электромагнитной волны, как бы, из-за “нагрева” плазмы полем волны, что меняет, в свою очередь, само поглощение, поскольку оно определяется основным состоянием $f_0(p, t)$. Тем самым процесс поглощения волны и изменения равновесного состояния взаимно согласуются. Такое приближение, в котором волна считается “линейной” и описывается формулами линейной теории, и при котором не учитывается медленное изменение равновесной функции $f_0(p, t)$ вследствие поглощения волны, известно как квазилинейное приближение.

Мы здесь изложим основы квазилинейной теории на примере продольных колебаний поля ($E = -\nabla\Phi$) и рассмотрим несколько простейших примеров ее применения. В отсутствие внешнего магнитного поля будем исходить из уравнения Власова и уравнений Максвелла в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (394)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum e \int f d\mathbf{r} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \sum e \int f \mathbf{v} d\mathbf{r} = 0.$$

Обе последние формы записи уравнений поля эквивалентны, в чем нетрудно убедиться воспользовавшись уравнением непрерывности. Считая поле относительно слабым, так что

$$\left(\frac{e^2 n^{1/3}}{T_e} \right)^{3/2} \approx \frac{v_e}{\omega_{Le}} \ll \frac{E^2}{8\pi n T_e} \ll 1. \quad (395)$$

Левая часть этого неравенства позволяет пренебречь столкновениями частиц в плазме, а правая — использовать линейное приближение для описания малых колебаний представив, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ в виде

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{p}, t) + f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{p}, t) + \sum_k \operatorname{Re} f_{1k} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (396)$$

Здесь $f_0(\mathbf{p}, t)$ медленно меняющаяся по сравнению с $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ функция времени, причем $f_1 \ll f_0$. Также можно представить и поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \sum_k \mathbf{E}_k e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (397)$$

Подставляя (396) и (397) в уравнение () и проводя усреднение по времени, легко получаем два уравнения для медленной $f_0(\mathbf{p}, t)$ и быстрой $f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ частей функции распределения

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + e \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (398)$$

Поскольку второе уравнение линейное и f_0 медленно меняющаяся функция, то используя (396) получаем

$$f_{1\mathbf{k}} = -\frac{ie\mathbf{E}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (399)$$

В таком же приближении для малых колебаний справедливо дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{p} = 0, \quad (400)$$

причем

$$\frac{\partial |E_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = 2\delta_{\mathbf{k}} |E_{\mathbf{k}}|^2. \quad (401)$$

Для получения уравнения для $f_0(\mathbf{p}, t)$ подставляем (399) в первое уравнение (398). В результате получим уравнение диффузии в пространстве импульсов

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} D_{ij} \frac{\partial f_0}{\partial p_j}, \quad D_{ij} = -\frac{e^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^2} |E_{\mathbf{k}}|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (402)$$

Уравнения (400)–(402) образуют полную систему уравнений квазилинейной теории для продольных колебаний изотропной плазмы. Ее нетрудно обобщить на случай магнитоактивной плазмы и для произвольных непотенциальных колебаний плазмы. Легко показать, что эта система обеспечивает выполнение трех основных законов сохранения: числа частиц, импульса и энергии плазмы и для произвольных непотенциальных колебаний плазмы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f d\mathbf{p} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\sum \int f \mathbf{p} d\mathbf{p} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} |E_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi\omega} \right] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\sum \int f \frac{p^2}{2m} d\mathbf{p} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{|E_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (403)$$

в чем можно убедиться простой проверкой.

Применим теперь полученную систему уравнений к конкретным задачам. Пусть в начальный момент в изотропной термодинамически равновесной электронной плазме в некоторой достаточно узкой области фазовых скоростей заданы

$$W_{\mathbf{k}}(0) = \frac{|E_{\mathbf{k}}(0)|^2}{8\pi} = \begin{cases} 0, & \frac{\omega}{k} \leq v_1, \\ W_0, & v_1 \leq \frac{\omega}{k} \leq v_2, \\ 0, & \frac{\omega}{k} \geq v_2. \end{cases} \quad (404)$$

На рис. 11 изображено начальное одномерно максвелловское распределение $F_0(v, 0)$

$$F_0(v, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}}, \quad (405)$$

нормированное на единицу, $\int F_0(v, 0) dv = 1$, и указана область фазовых скоростей $\omega/k \in (v_1, v_2)$, где $\Delta v \ll v_t$.

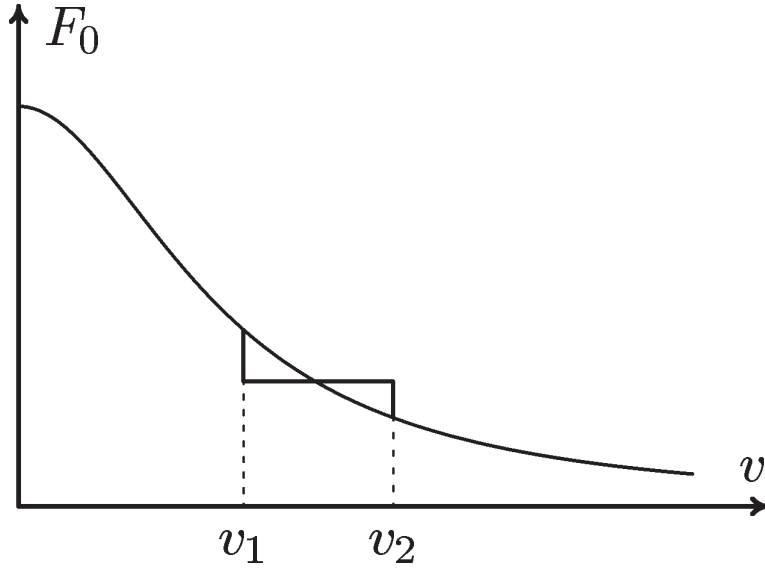


Рис. 11: Эволюция функции распределения в квазилинейной теории

В результате поглощение колебаний функция $F_0(v, t)$ будет искажаться. Требуется описать временную динамику $W_{\mathbf{k}}(t)$ и $F_0(v, t)$ исходя из квазилинейных уравнений, которые в одномерном случае записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v}, \\ D &= -\frac{e^2}{2m^2} \sum_{\mathbf{k}} |E_{\mathbf{k}}|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\pi e^2 |E_{\mathbf{k}}|^2}{2 m^2 k v}, \\ \frac{\partial |E_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} &= 2\delta_{\mathbf{k}} |E_{\mathbf{k}}|^2, \\ \delta_{\mathbf{k}} &= -\frac{\omega_{Le}^3}{4k^2} \int dv k \frac{\partial F_0}{\partial v} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - kv} = \frac{\pi \omega_{Le}^3}{2 k^2} \frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \end{aligned} \quad (406)$$

Из этой системы видно, что существует стационарное решение с $\partial F_0 / \partial v = 0$ в области $v \in (v_1, v_2)$, причем в этом интервале $\delta_{\mathbf{k}} = 0$ и поэтому $|E_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty)|^2 \neq$

0. Такое образование “плато” на $F_0(v)$ реализуется, если в начальном состоянии амплитуда колебаний $|E_k(0)|^2$ достаточно велика.

Уравнения (406) описывает временную динамику квазилинейной релаксации плазменных колебаний. Мы здесь выпишем лишь результаты, относящиеся конечному состоянию с образованным “плато” на функции распределения. Из закона сохранения числа частиц между скоростями (v_1, v_2) следует установившаяся высота “плато”

$$F_0(v, \infty) = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} F_0(v, 0) dv. \quad (407)$$

Уравнения же (406) при использовании этого соотношения дают установившуюся амплитуду плазменных колебаний

$$\begin{aligned} W_k(\infty) - W_k(0) = \\ = \frac{m^2 \omega_{Le}^4}{4\pi e^2 k^2} \int_{v_1}^{v_2} dv \left[\frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} dv F_0(v, 0) - F_0(v, 0) \right]. \end{aligned} \quad (408)$$

Заметим, что описанное установившееся состояние с образованием “плато” достигается только при достаточно высоком уровне начальных колебаний. При малом уровне колебания могут полностью поглотиться в плазме прежде, чем на функции распределения образуется “плато”. Тем самым процесс релаксации досрочно завершится.

Наконец приведем оценку времени установления. Согласно первому уравнению (406) оно порядка

$$\tau_p \approx \frac{v^2}{D} \approx \frac{v^2 n T_e}{v T_e \omega_{Le} W_k} \approx \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \frac{n T_e}{W_k} \frac{1}{\omega_{Le}} \gg \frac{1}{\omega_{Le}}. \quad (409)$$

Более того, это время больше чем $1/\delta_k$.

Рассмотрим теперь другой пример, в котором происходит квазилинейная релаксация плазменной неравновесности. Мы уже знаем, что неравновесность в плазме приводит к возбуждению плазменных колебаний, и тем самым плазма релаксирует к новому состоянию с излучением. В качестве такого примера мы рассмотрим плотную “холодную” плазму с моноэнергетическим пучком. В такой плазме происходит вынужденное черенковское излучение плазменных волн со спектром

$$\text{Re } \omega = \mathbf{k} \mathbf{v} = \omega_{Le}, \quad \text{Im } \omega = \delta_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_b}{2n_p} \right)^{1/3} \omega_{Le}. \quad (410)$$

Возбуждаемые пучком колебания искажают функцию распределения электронов пучка: электроны пучка в среднем тормозятся и вместе с тем их энергетиче-

ский спектр резко уширяется. В этом можно убедиться, записав уравнения квазилинейной теории для одномерного случая

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial F_0}{\partial v}, \\ D &= -\frac{e^2}{2m^2} \sum_k |E_k|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} = -\frac{e^2}{2m^2} \frac{1}{\delta} \sum_k |E_k|^2, \\ \frac{\partial |E_k|^2}{\partial t} &= 2\delta |E_k|^2,\end{aligned}\quad (411)$$

а $\delta_k = \delta$ — дается формулой (410). Система (411) дополняется начальными условиями

$$F_0(v, 0) = \delta(v - u), \quad \frac{|E_k(0)|^2}{8\pi} = W_k(0). \quad (412)$$

После замены переменных

$$\frac{d\tau}{dt} = D(t), \quad \frac{d}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} = D \frac{d}{d\tau}, \quad (413)$$

система (411) сводится к виду

$$\frac{\partial F_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial D}{\partial \tau} = 2\delta, \quad D = -\frac{4\pi e^2}{m^2 \delta} W, \quad (414)$$

где $W = \sum_k W_k$ — полная энергия колебаний, возбуждаемых пучком. Условия же (412) принимают вид

$$F_0(v, 0) = \delta(v - u), \quad D(v, 0) = D_0 = -\frac{4\pi e^2}{m^2 \delta} W(0). \quad (415)$$

Из второго уравнения (414) следует, что

$$D(v, \tau) = D_0 + 2\delta\tau \rightarrow 2\delta\tau. \quad (416)$$

Это приводит к резкому уширению функции распределения со временем, что видно из решения первого уравнения (414) с учетом первого условия (415):

$$F_0(v, \tau) = \sqrt{\frac{m}{4\pi\tau}} \exp\left[-\frac{m(v-u)^2}{4T}\right]. \quad (417)$$

Такое уширение, линейное со временем, будет происходить до тех пор, пока применимо приближение моноэнергетического пучка, т. е. до тех пор, пока

$$\left(\frac{n_b}{2n_p}\right)^{1/3} > \frac{v_{Te}}{u} = \sqrt{\frac{2T}{mu^2}}. \quad (418)$$

Отсюда находим максимальную температуру (уширение) и время достижения такого состояния:

$$T_{max} \approx 2\tau_{max} = mu^2 \left(\frac{n_b}{2n_p}\right)^{1/3}, \quad \tau_p \approx \frac{1}{\delta} = \left(\frac{2n_p}{n_b}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega_{Le}}. \quad (419)$$

Таким образом, потеря энергии пучка на излучение, которое переходит в “тепло”, составляет $2(n_b/2n_p)^{1/3}$ часть от полной энергии пучка.

Солитоны и нелинейные волны в плазме

В этом заключительном разделе нашего курса мы рассмотрим некоторые точные решения уравнений поля, наиболее распространенные в нелинейной динамике плазмы. Прежде однако обсудим общий математический аппарат, используемый при этом.

а) *Основы теории солитонов в плазме.* Наиболее распространенные спектры $\omega(k)$ в плазме можно разбить на два класса: спектры акустического типа

$$\omega(k) = kv_s - \beta k^3, \quad (420)$$

и спектры оптического типа

$$\omega(k) = \omega_0 + \beta k^2. \quad (421)$$

Действительно, к первому типу относятся ионно-звуковые колебания, которые при малой дисперсии ($k^2 r_{De}^2 \ll 1$) приобретают вид (420)

$$\omega = kv_s - k^3 v_s r_{De}^2 = kv_s - k^3 \beta, \quad \beta = v_s r_{De}^2. \quad (422)$$

Ко второму типу относятся ленгмюровские колебания, которые в этом же пределе записываются в виде (421)

$$\omega = \omega_{Le} + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega_{Le}}, \quad \beta = \frac{3}{2} v_{Te} r_{De}. \quad (423)$$

Оба эти колебания чисто потенциальны.

В одномерном случае уравнения для потенциала поля для акустических и оптических типов колебаний можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_s \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0, \quad (424)$$

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_0 \Phi + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (425)$$

Благодаря последним слагаемым происходят линейное дисперсионное расплывание пакетов волн.

Учтем теперь нелинейности. Для акустических колебаний они, первую очередь, связаны с разогревом среды (в плазме — электронов), который при малом нагреве можно учесть через зависимость скорости звука v_s от потенциала поля

$$v_s = v_0 + \alpha \Phi^{m-1} \quad (426)$$

где $m > 1$. Подстановка этого выражения в (424) приводит к аналогу известного уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\alpha}{m} \frac{\partial \Phi^m}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0. \quad (427)$$

Путем замены

$$\Phi = \frac{1}{\alpha^{m-1}} f(x - v_0 t)$$

это уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial f^m}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad (428)$$

который имеет очевидный первый интеграл

$$\beta \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - v f + \frac{f^m}{m} = 0, \quad (429)$$

где $\tau = x - vt$, причем учтено, что $f(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. В свою очередь уравнение (429) допускает солитонное решение

$$f(\tau) = \frac{f_{max}}{\operatorname{ch}^{2n} \frac{\tau}{\Delta}}. \quad (430)$$

Прямой подстановкой этого решения в (429) находим

$$n = \frac{1}{m-1} > 0, \quad \frac{2(n+1)(2n+1)}{\Delta^2} \beta = f_{max}^{m-1}, \quad (431)$$

$$v = \frac{2n f_{max}^{n-1}}{(2n+1)(n+1)}.$$

Общий вид солитона при $\beta > 0$ представлен на рис. 12. При $\beta < 0$ эта кривая обращается вниз. Таким образом, солитон существует при любом знаке β .

Рассмотрим теперь нелинейную оптическую волну при учете зависимости ω_0 от амплитуды поля

$$\omega_0 = \omega_{00} + \alpha |\Phi|^{2m}, \quad (432)$$

где $m > 0$. Подстановка (432) в уравнение (425) в одномерном случае приводит к нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \omega_{00} \Phi - \alpha |\Phi|^{2m} \Phi + \beta = 0. \quad (433)$$

Для “стационарного” решения вида $\Phi = \psi e^{-i\omega t}$ имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \left[\frac{U(x, t)}{6\beta} + E \right] \psi = 0. \quad (434)$$

Здесь $U(x, t) = -6\alpha |\psi|^{2m}$ — играет роль медленно меняющейся со временем потенциальной энергии, а $E = (\omega - \omega_{00})/\beta$ — роль собственного значения. Если

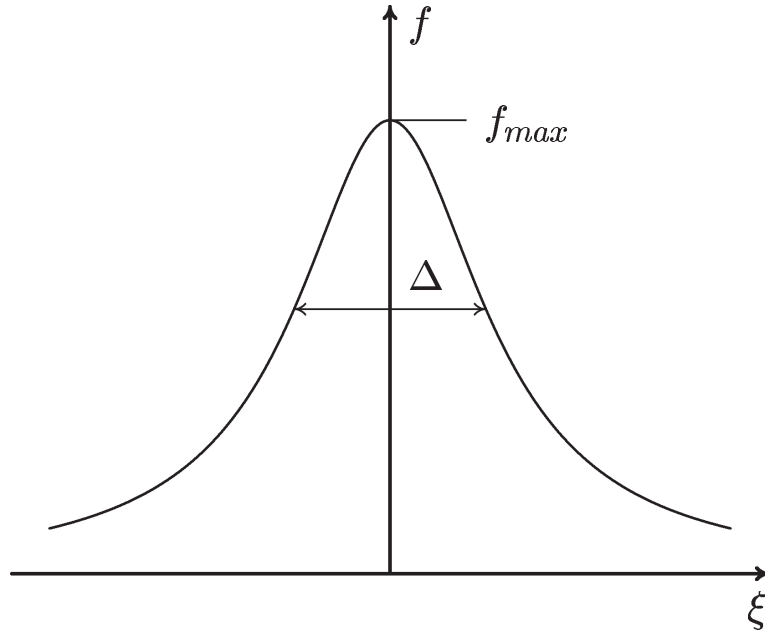


Рис. 12: Солитон КдВ

функция $U(x, t)/6\beta > 0$ в конечной области и стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, то уравнение (434) описывает финитное движение, локализованное в области положительности $U(x, t)$.

Пусть $U(x, t)$ совпадает с (430) при $n = 2$, т. е.

$$U(x, t) = \frac{6\beta U_0}{\text{ch}^2 \frac{\tau}{\Delta}} = 6\alpha |\psi|^{2m}. \quad (435)$$

где $\tau = x - vt$. Тогда уравнение (434) при $m = 1$ имеет решение в виде гипергеометрической функции ψ_k (полинома степени $k = 0, 1, \dots$, причем каждому k соответствует собственное значение s $k < s$).

$$s = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4u_0\Delta^2} - 1), \quad E_k = -\frac{(s - k)^2}{\Delta^2}. \quad (436)$$

Если учесть, что при $m = 1$ согласно (430) $U_c\Delta^2 = 2$, а поэтому $s = 1$ и $n = 0$, то

$$E = -\frac{1}{\Delta^2} = -\frac{U_0}{2}. \quad (437)$$

Таким образом, мы нашли оптический солитон, локализованный в бегущей потенциальной яме акустического солитона, которым является величина $|\psi|^2$, представляющая собой энергию оптической волны. Такой акустический солитон, называется солитоном огибающей.

б) *Ионно-звуковой солитон в неизотермической плазме.* Выше уже отмечалось, что примером акустической волны в плазме является ионно-звуковая волна, которая существует в плазме с $T_e \gg T_i$ и описывается одножидкостной гидродинамикой. Для того чтобы учесть нелинейную динамику этой волны, мы выйдем

за рамки одножидкостной гидродинамики и учтем малое отклонение от квазинейтральности плазмы, записав уравнение в одномерном пределе

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i V}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= 4\pi e(N_e - N_i), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V &= -\frac{e}{m}\nabla\Phi, & N_e &= N_0 e^{e\Phi/T_e}.\end{aligned}\quad (438)$$

Из этой системы уравнений, используя разложение по степеням Φ в самом низком приближении с $e\Phi \ll T_e$, получаем

$$\frac{T_e r_{De}^2}{2e} \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} - \frac{T_e}{e} \left(1 - \frac{v_s}{u}\right) \Phi + \frac{1}{2} \Phi^2 = 0. \quad (439)$$

где $\tau = x - vt$, $r_{De} = \sqrt{T_e/4\pi e^2 N_0}$ — дебаевский радиус электронов, а u — подлежит определению. Это уравнение совпадает по виду с (429), и поэтому его решение сводится к

$$\Phi = \frac{\Phi_{max}}{\text{ch}^4\left(\frac{\tau}{\Delta}\right)}. \quad (440)$$

где

$$1 - \frac{v_s}{u} = \frac{8}{15} \left(\frac{e\Phi_{max}}{\pi T_e}\right)^{1/2} \ll 1, \quad \frac{e\Phi_{max}}{\pi T_e} = \frac{225 r_{De}^4}{\Delta^4} \ll 1. \quad (441)$$

Таким образом, $u \simeq v_s$, а рассмотренное решение есть ионно-звуковой солитон.

б) *Нелинейная поперечная электромагнитная волна в плазме.* Рассмотрим теперь поперечную электромагнитную волну с полем $B_x(z, t)$, $E_y(z, t)$ и частотой, близкой к электронной ленгмюровской. Фазовая скорость волны намного больше скорости света в вакууме c . Система уравнений, описывающая такую волну, записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} e N_e v_y, & \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= e E_y,\end{aligned}\quad (442)$$

к этой системе мы добавим еще усредненное уравнение движения электронов (при $T_e = \text{const}$)

$$\frac{T_e}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial z} = -\frac{e}{mc} \langle v_y B_x \rangle = -\frac{e^2}{2m\omega^2} \frac{\partial}{\partial z} |E_y|^2. \quad (443)$$

Здесь $\omega \simeq \omega_{Le}$ частота поля, которая определяется невозмущенной концентрацией электронов N_0 , причем согласно (443)

$$N_e = N_0 \exp\left(-\frac{e^2 |E_y|^2}{4m\omega^2 T_e}\right) \quad (444)$$

Из (442)–(443) с учетом $|E_y|^2 \ll 8\pi N_0 T_e$, используя малость поля E_y , получаем следующее уравнение

$$i \frac{\partial E_y}{\partial t} - \omega_{Le} E_y + \frac{c^2}{\omega_{Le}} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{1}{8m\omega_{Le}} \frac{e^2}{T_e} |E_y|^2 E_y = 0. \quad (445)$$

Это уравнение совпадает с нелинейным уравнением Шредингера (433), проанализированным выше. Поэтому основываясь на этом анализе, мы можем заключить, что медленно меняющийся потенциал $U(x, t) = \frac{3}{4} \frac{e^2 |E_y|^2}{m\omega_{Le} T_e}$, а следовательно, если $|E_y|^2 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, то (445) допускает решение в виде оптического солитона с огибающей $|E_y(z, t)|^2$. Последний сам может создавать в плазме ионно-звуковой солитон. Это явление сжатия поля в нелинейной среде называют часто явлением самофокусировки или коллапса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачи⁶

Задача 1. На диаграмме $N(T)$ электронной плазмы нарисовать области вырождения электронов и применимости газового приближения.

Решение. Область вырождения определяется неравенством

$$\varepsilon_F = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 N^{2/3}}{2m} \geq \kappa T, \quad (1)$$

где $\hbar = 10^{-27}$ эрг/с — постоянная Планка, а $\kappa = 1,38$ эрг/гр — постоянная Больцмана и лежит выше прямой 1 на диаграмме, показанной на рис. 13.

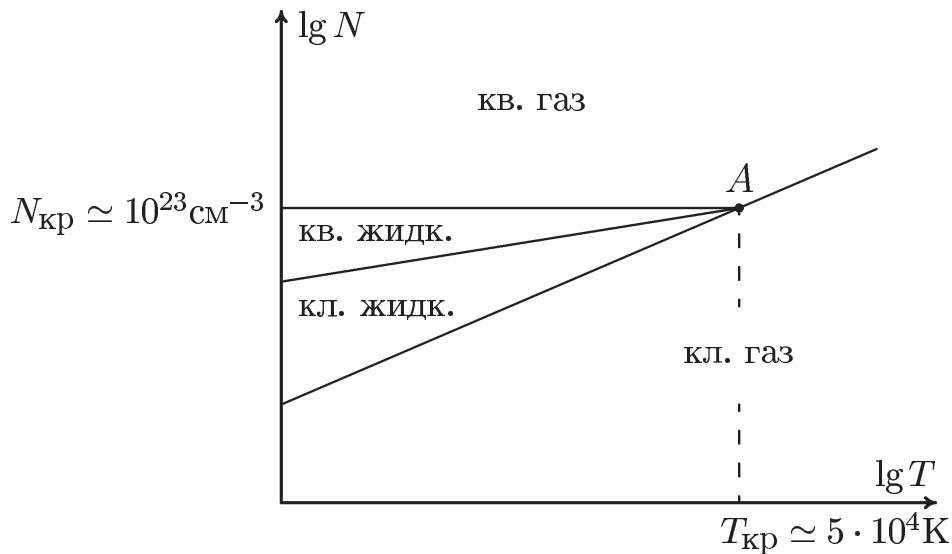


Рис. 13: Диаграмма состояний плазмы

Область применимости газового приближения невырожденной электронной плазмы определяется условием

$$\eta_{cl} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\kappa T} \leq 1, \quad (2)$$

и лежит ниже прямой 2 на указанной диаграмме. Для вырожденной плазмы область применимости газового приближения лежит выше прямой 3, параллельной оси OX ,

$$\eta_{qu} = \frac{e^2 N^{1/3}}{\varepsilon_F}. \quad (3)$$

Все эти прямые пересекаются в точке , в которой

$$e^2 N^{1/3} = \varepsilon_F = \kappa T. \quad (4)$$

⁶ Номера задач соответствуют номерам глав.

Отсюда получаем в этой точке $N \simeq 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $\varepsilon_F \simeq 5 \text{ эВ}$, а $T \simeq 5 \cdot 10^4 \text{ К}$. Для хороших металлов при комнатной температуре $T \simeq 300 \text{ К}$ $N \simeq 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ имеет место вырождение и слабая неидеальность $\eta_{\text{qu}} \sim 1$, для ионосферной плазмы $T \simeq 10^4 \text{ К}$ и $N \simeq 10^6 \text{ см}^{-3}$, напротив, хорошо выполняется классическое условие газового приближения $\eta_{\text{cl}} \ll 1$.

Задача 2. В модели независимых частиц вычислить потери энергии быстрой нерелятивистской частицы в изотропной плазме.

Решение. Потери энергии движущейся частицы определяются работой, которую производит сила торможения, действующая на частицу со стороны создаваемого ею электрического поля

$$W = \frac{\mathbf{F}\mathbf{v}}{v} = \frac{q(\mathbf{v}\mathbf{E})}{v} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} \quad (1)$$

Здесь q — заряд, а $v \gg v_{Te}$ — скорость движущейся частицы, $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, а \mathbf{E} — создаваемое частицей электрическое поле. В случае нерелятивистской скорости \mathbf{v} поле \mathbf{E} с хорошей степенью точности оказывается потенциальным $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, а потому оно находится из решения уравнения Пуассона

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (2)$$

Разложим в интеграл Фурье

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} \mathbf{D}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} d\mathbf{k}, \quad (3)$$

и учтем, что для потенциального поля

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\varepsilon(\omega)\Phi(\omega, \mathbf{k}), \quad (4)$$

где в случае изотропной плазмы $\varepsilon(\omega)$ дается выражением (17). В результате несложных вычислений находим решение уравнения Пуассона (3) для потенциала поля

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{2\pi^2} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)}}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})}. \quad (5)$$

Теперь не представляет труда найти электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и, воспользовавшись формулой (1), работу поля над зарядом на единицу длины его пути:

$$W = \frac{iq^2}{2\pi v} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{k^2} \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})}. \quad (6)$$

Вводя обозначения $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ и $k = k_{\perp}$, перепишем (6) в виде

$$W = -\frac{2q^2}{\pi v^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{\infty} \frac{k dk}{k^2 + \omega^2/v^2} \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\omega)}. \quad (7)$$

Здесь мы учли, что $\text{Re } \varepsilon(\omega)$ — четная функция частоты, а $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ — нечетная.

Заметим, что в (7) дают вклад не только те области ω , в которых $\text{Im } \varepsilon(\omega) \neq 0$ и происходит существенное поглощение энергии поля, создаваемого зарядом, но и области, в которых $\text{Im } \varepsilon(\omega) \rightarrow +0$ и $\text{Re } \varepsilon(\omega) \rightarrow 0$ происходит возбуждение (излучение) продольных колебаний. Более того, при малых частотах столкновений последний вклад может быть определяющим. Приведем здесь только эту часть потерь, обозначив ее через W^l :

$$\begin{aligned} W^l &= \frac{2q^2}{v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^\infty \frac{kdk}{k^2 + \omega^2/v^2} \delta(\varepsilon(\omega)) = \\ &= \frac{2q^2\omega_p^2}{v^2} \int_0^\infty \frac{kdk}{k^2 + \omega_p^2/v^2} = \frac{1}{2} \frac{q^2\omega_p^2}{v^2} \ln \left(k^2 + \frac{\omega_p^2}{v^2} \right) \Big|_0^\infty = \\ &= \frac{q^2\omega_p^2}{2v^2} \ln \frac{k_{\max}^2 v^2}{\omega_p^2} = \frac{q^2\omega_p^2}{2v^2} \ln \frac{v^2}{v_{Te}^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При вычислениях мы воспользовались выражением (17) в пределе $\nu_e \rightarrow 0$ и учли, что оно справедливо в условиях $\omega \gg kv_{Te}$, это позволило оценить $k_{\max}^2 = \omega_p^2/v^2$.

Задача 3. Показать, что альфвеновская волна, описываемая первой формулой (54), является точным решением уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой идеально проводящей жидкости.

Решение. В случае несжимаемой жидкости $\rho = \rho_0 = \text{const}$, а поэтому из уравнения непрерывности (50) следует $\text{div } \mathbf{v} = 0$, т.е. скорость \mathbf{v} как и магнитное поле \mathbf{B} волны являются поперечными. Если искать решения уравнений (50), в котором все величины зависят от одной координаты (внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 считается направленной вдоль оси OZ), то из второго и четвертого уравнений (50) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{B} и \mathbf{v} — неравновесные величины, а ρ_0 и B_0 — равновесные, причем никакой линеаризации уравнений (50) не производилось. Легко видеть, что эта система сводится к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Любое из этих уравнений, очевидно, допускает решения в виде плоской волны $\exp(-i\omega t + ik_z z)$, причем между ω и k_z имеем связь (54)

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2, \quad (3)$$

что и требовалось показать.

Задача 4. В модели лоренцовского газа рассмотреть полностью ионизованную плазму во внешнем электрическом поле и вычислить ее проводимость.

Решение. Лоренцовским газом называется электронный газ, в котором пренебрегается электрон-электронными столкновениями, но учитываются столкновения электронов с ионами, очевидно, в случае полностью ионизованной плазмы. Такое приближение справедливо, если $Z = |e_i/e| \gg 1$. Кинетическое уравнение Ландау для лоренцовского газа во внешнем электрическом поле записывается в виде

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}} = 2\pi e^2 e_i^2 N_i L \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \frac{\partial f_e}{\partial p_j}. \quad (1)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$f_e = f_M + \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{f}_1}{v}, \quad (2)$$

где f_M — распределения Максвелла, а $|\mathbf{f}_1| \ll f_M$. При этом

$$e\mathbf{E} \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{p}} = \frac{4\pi e^2 e_i^2 N_i L}{m^2} \frac{\mathbf{v} \mathbf{f}_1}{v^4}. \quad (3)$$

В результате находим

$$f_e = f_M + \frac{e\mathbf{E}}{m\nu(v)} \frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{v}}, \quad \nu(v) = \frac{4\pi e^2 e_i^2 N_i L}{m^2 v^3}. \quad (4)$$

Это выражение определяет ток в плазме

$$\mathbf{j} = e \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{p} = \frac{32}{3\pi} \frac{e^2 N_e}{m\nu_{\text{eff}}} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5)$$

где ν_{eff} определена формулой (80). Найденная здесь проводимость лоренцовского газа

$$\sigma = \frac{32}{3\pi} e^2 N_e \quad (6)$$

отличается от точного выражения (89) множителем порядка 1,5. Наконец отметим, что полученные выше результаты справедливы пока $|\mathbf{f}_1| \ll f_M$, что означает

$$u = \langle v \rangle = \frac{e\mathbf{E}}{m\nu_{\text{eff}}} \ll v_{Te}. \quad (7)$$

Из этого условия определяется критическое поле Драйзера

$$E_{\text{cr}} = \frac{m\nu_{\text{eff}}}{e} \ll v_{Te}. \quad (8)$$

Пока $E < E_{\text{cr}}$ токовая дрейфовая скорость меньше тепловой и можно пользоваться лоренцовским разложением (2). В противном случае скорость электрического дрейфа становится больше тепловой, сечение кулоновского рассеяния с ростом

скорости начинает сильно падать и электроны плазмы начинают неограниченно ускоряться — имеет место процесс “убегания” электронов.

Задача 5. Исходя из уравнений двухжидкостной гидродинамики “холодной” бесстолкновительной плазмы (§) найти среднюю силу, действующую на плазму в неоднородном СВЧ поле.

Решение. Будем исходить из уравнения движения (118) для электронов

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))], \quad (1)$$

где \mathbf{B}_0 — внешнее постоянное магнитное поле, а \mathbf{E} и \mathbf{B} — компоненты СВЧ поля, причем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \sin \omega_0 t, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{\omega_0} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \cos \omega_0 t. \quad (2)$$

Считая поля \mathbf{E} и \mathbf{B} малыми, из линеаризованного уравнения (1) для первого приближения

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} = \frac{e \mathbf{E}}{m} + \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0 \times \mathbf{B}_0], \quad (3)$$

находим

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 \sin \omega_0 t + \mathbf{V}_2 \cos \omega_0 t \equiv & -\frac{e^2}{m^2 c} \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0]}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \omega_0 t - \\ & - \frac{e \omega_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left\{ \mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{1}{\omega_0^2} \mathbf{B}_0 (\mathbf{E} \mathbf{B}_0) \right\} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Omega = eB_0/mc$ — ларморовская частота электронов. Подставляя далее \mathbf{V}_0 в малые нелинейные слагаемые (1) и усредняя по ω_0 , находим среднюю силу, действующую на электронную компоненту плазмы:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{av}} = -m \overline{(\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{V}_0} + \frac{e}{\omega_0} \overline{[\mathbf{V}_0 \times \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cos \omega_0 t} = \\ = -\frac{m}{2} \left\{ (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 \nabla) \mathbf{V}_2 - \frac{e}{\omega_0} [\mathbf{V}_2 \times \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r})] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сила \mathbf{F}_{av} имеет составляющие как вдоль, так и поперек внешнего поля \mathbf{B}_0 . Если внешнее поле отсутствует

$$\mathbf{F}_{\text{av}} = -\frac{e^2}{4m\omega_0^2} \nabla \mathbf{E}^2(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Это выражение известно как сила Миллера.

Задача 6. Исследовать характер проникновения поперечного электромагнитного поля в изотропную плазму в зависимости от частоты ω в области $0 < \omega < \infty$.

Решение. Характер проникновения поперечного поля в плазму определяется уравнением (146):

$$k^2 c^2 - \omega^2 \varepsilon^{\text{tr}} = 0, \quad (1)$$

причем глубина проникновения находится из его решения и дается формулой

$$\lambda_{\text{sk}} = \frac{1}{\text{Im } k(\omega)}. \quad (2)$$

Приведем явные выражения λ_{sk} в различных предельных случаях.

а) Область $\omega \gg \nu_e, kv_{Te}$, в которой

$$\varepsilon^{\text{tr}} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right). \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) дает

$$\lambda_{\text{sk}} = \begin{cases} \frac{2c\omega^2}{\omega_{Le}^2 \nu_e} & \text{при } \omega \gg \omega_{Le}, \\ \frac{c}{\omega_{Le}} & \text{при } \omega_{Le} \frac{v_{Te}}{c} \ll \omega \ll \omega_{Le}. \end{cases} \quad (4)$$

б) Область $kv_{Te} \gg \omega, \nu_e$, в которой

$$\varepsilon^{\text{tr}} = 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega kv_{Te}}. \quad (5)$$

В результате из (1) получаем формулу глубины проникновения для аномального скин-эффекта

$$\lambda_{\text{sk}} = 2 \left(\frac{c^2 v_{Te}}{\omega_{Le}^2 \omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

Это выражение справедливо при

$$\frac{v_{Te}}{c} \omega_{Le} \gg \omega \gg \omega^* = \nu_e \frac{\nu_e c^2}{\omega_{Le}^2 v_{Te}^2},$$

которое может выполняться, если $\nu_e < \omega_{Le} v_{Te} / c$.

в) Наконец, область $\nu_e \gg kv_{Te}, \omega$, в которой

$$\varepsilon^{\text{tr}} = 1 + i \alpha \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \nu_e}, \quad (7)$$

где $\alpha = 1$ для слабоионизованной плазмы и $\alpha = 1,96$ для полностью ионизованной.

В этой области частот имеем обычный скин-эффект

$$\lambda_{\text{sk}} = \left(\frac{2\nu_e c^2}{\alpha \omega \omega_{Le}^2} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Легко показать, что в этом случае $\omega < \omega^*$. Результаты проведенного анализа представлены графически на рис. 14.

Задача 7. На примере квазипродольного распространения поперечной волны показать, что при учете релятивистской зависимости массы электрона от скорости в

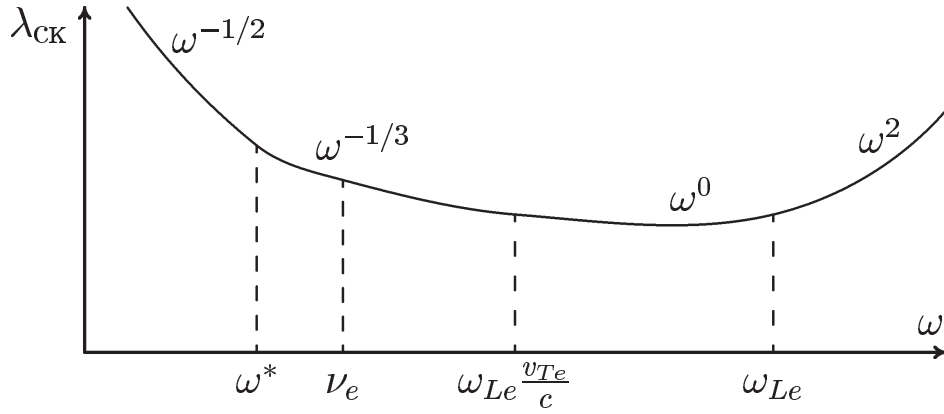


Рис. 14: Зависимость скиновой глубины от частоты

магнитоактивной плазме появляется ненулевое поглощение волн даже при полном пренебрежении пространственной дисперсией.

Решение. Как видно из формул (190) для эффективной поперечной диэлектрической проницаемости в случае продольного распространения волны при пренебрежении пространственной дисперсией ($k \rightarrow 0$) эта величина оказывается чисто действительной, что свидетельствует об отсутствии поглощения электромагнитного поля в плазме. Можно показать, что в этом пределе и полный тензор диэлектрической проницаемости эрмитов, т. е. поглощение поля в плазме, полностью отсутствует.

Однако, если учесть релятивистскую зависимость массы электрона от скорости, то такое поглощение появится даже при полном пренебрежении пространственной дисперсией. Действительно, полагая в формуле (190) $k_z = 0$, и учитывая замену

$$m = m_0 \gamma = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

в выражении для ларморовской частоты путем замены $\Omega \rightarrow \Omega/\gamma$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega) &= 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0e}}{\partial E} \frac{v_{\perp}^2}{\omega \mp \Omega_e/\gamma} = \\ &= 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega} \frac{2}{3} \int d\mathbf{p} \frac{\partial f_{0e}}{\partial E} v^2 \left[\frac{\Re}{\omega \mp \Omega_e/\gamma} - i\pi\delta(\omega \mp \Omega_e/\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь мы ограничились рассмотрением чисто электронной плазмы. Более того, для определенности ниже анализируется только выражение для $\varepsilon_{\perp}(\omega)$, содержащее полюс $\omega - \Omega_e/\gamma$, т. е. вблизи циклотронной частоты.

Для нерелятивистского максвелловского распределения интегрирование в (1) не представляет труда и приводит к выражению

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - \Omega_e)} + i \frac{4\pi}{3} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega \Omega_e} \frac{c^5}{v_{Te}^5} \times \left(\frac{\Omega_e - \omega}{\Omega_e} \right)^{3/2} \times \begin{cases} 1 & \text{при } \omega < \Omega_e, \\ 0 & \text{при } \omega > \Omega_e. \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя в дисперсионное уравнение для поперечной волны получаем при

$$k^2 c^2 = \omega^2 \varepsilon_{\perp} \approx - \frac{\omega \omega_{Le}^2}{\omega - \Omega_e} \left[1 + i \frac{4\pi}{3} \frac{c^5}{v_{Te}^5} \left(\frac{\Omega_e - \omega}{\Omega_e} \right)^{5/2} \right]. \quad (3)$$

Это уравнение следует сравнивать с (197), а его решения ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$)

$$\omega = \Omega_e - \frac{\omega \omega_{Le}^2}{k^2 c^2}, \quad \delta = - \frac{4\pi}{3} \frac{c^5}{v_{Te}^5} \omega \left(\frac{\omega_{Le}^2}{k^2 c^2} \right)^{7/2}, \quad (4)$$

с (198), что позволит оценить рассматриваемое чисто релятивистское поглощение

Задача 8. Исследовать электромагнитные волны в плоском слое холодной немагнитной бесстолкновительной плазмы.

Решение. Направим ось нормально к слою и запишем уравнение для волны E -типа с отличными от нуля компонентами поля E_x , E_z и B_y (см. (226)):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - k_z^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E_z = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon(x)$, уравнение (1) пригодно как внутри слоя $0 \leq x \leq a$ плазмы, где $\varepsilon(x) = \varepsilon = \text{const}$, так и вне слоя, $x \leq 0$ и $x \geq a$, где $\varepsilon = 1$. Дополним уравнение (1) граничными условиями

$$\left\{ E_y \right\}_{x=0,a} = 0, \quad \left\{ B_y \right\}_{x=0,a} = 0, \quad (2)$$

где

$$B_y = - \frac{i\omega}{c} \frac{\varepsilon(x)}{k_z^2 - \omega^2 \varepsilon(x)/c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (3)$$

Теперь мы можем записать решения уравнения (1)

$$E_z(x) = \begin{cases} c_1 e^{\varkappa_0 x}, & x \leq 0, \\ c_2 e^{\varkappa x} + c_3 e^{-\varkappa x}, & 0 \leq x \leq a, \\ c_4 e^{-\varkappa_0 x}, & x \geq a. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\varkappa_0^2 = k_z^2 - \omega^2/c^2 > 0$, а $\varkappa^2 = k_z^2 - \varepsilon \omega^2/c^2 > 0$, причем $\varkappa^2 > 0$ в случае поверхностных волн (затухающих вглубь слоя) и $\varkappa^2 < 0$ в случае объемных волн

(осциллирующих внутри слоя). Подставляя (4) в граничные условия (2) после несложных вычислений, находим дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\varepsilon^2}{\varkappa^2} - \frac{1}{\varkappa_0^2}\right)^2 e^{-\varkappa a} - \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa_0}\right)^2 e^{\varkappa a} = 0. \quad (5)$$

Для поверхностной волны, т. е. при $\varkappa^2 > 0$, в пределе $\varkappa a \gg 1$, отсюда получаем уравнение

$$\varepsilon \varkappa_0 + \varkappa = 0,$$

которое, как и следовало ожидать, совпадает (231). Если же $\varkappa a \ll 1$, то независимо от знака \varkappa^2 имеем уравнение

$$1 + \varepsilon a \varkappa_0 = 0, \quad (7)$$

решение которого существует только при $\varepsilon < 0$ и имеет вид

$$\omega = \begin{cases} k_z c & \text{при } \omega \ll \omega_{Le} \sqrt{|k_z| a}, \\ \omega_{Le} \sqrt{|k_z| a} & \text{при } \omega \ll |k_z| c. \end{cases} \quad (8)$$

Наконец, при $\varkappa^2 < 0$ и $|\varkappa a| \gg 1$ с хорошей степенью точности

$$\varkappa^2 a^2 = \pi^2 n^2. \quad (9)$$

Откуда находим спектр объемных волн в плазме

$$\omega^2 = k_z^2 c^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2} c^2 + \omega_{Le}^2. \quad (10)$$

Задача 9. Исходя из выражения (288) исследовать желобковую неустойчивость сильно столкновительной плазмы, обусловленной кривизной силовых линий удерживающего магнитного поля.

Решение. Как было показано в § , учет кривизны силовых линий магнитного поля достигается заменой $\omega \rightarrow \omega'_\alpha = \omega - k_y u_\alpha$, где $u_\alpha = -g_\alpha / \Omega_\alpha$. Именно эту замену нужно сделать в формуле (288), перейдя, кроме того, к пределу $T_\alpha \rightarrow 0$. В результате из (288) получим

$$\varepsilon(\omega, k, x) = 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{k^2} \frac{\omega'_\alpha + i\nu_\alpha}{\omega'_\alpha} \times \left\{ \frac{k_\perp^2}{\Omega_\alpha^2} - \frac{k_z^2}{(\omega'_\alpha + i\nu_\alpha)^2} + \frac{k_y^2}{\Omega_\alpha(\omega'_\alpha + i\nu_\alpha)} \frac{\partial \ln N_\alpha}{\partial x} \right\}. \quad (1)$$

В этом общем выражение теперь учтем неравенства

$$\omega'_e \ll \nu_e, \quad \omega'_i \gg \nu_i, \quad \omega \gg k_y u_\alpha. \quad (2)$$

В результате получим локальное дисперсионное уравнение колебаний с учетом конечного значения k_z :

$$\left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right) k_{\perp}^2 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} k_z^2 - \frac{c^2}{v_A^2} \frac{g_{\text{eff}} k_y^2}{\omega^2} \frac{\partial \ln N}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где $\sigma = \omega_{Le}^2/4\pi\nu_e$ — проводимость плазмы. При $k_z = 0$ это уравнение описывает неустойчивые желобковые колебания плазмы со спектром (299). Конечное значение k_z , как видно из (3), оказывает стабилизирующее действие на неустойчивость.

Заметим, что уравнение (3) при $k_z = 0$ следует из уравнения МГД идеальной жидкости.

Задача 10. Показать, что в холодной, чисто электронной плазме во внешнем СВЧ поле при учете релятивистских эффектов в скорости осцилляций электронов возможна параметрическая раскачка ленгмюровских колебаний.

Решение. Электроны плазмы в сильном СВЧ поле $E_0 \sin \omega_0 t$ совершают осцилляторное движение

$$\frac{u(t)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -\frac{eE_0}{m\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

Учитывая это, запишем линеаризованную систему гидродинамики холодной электронной плазмы в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta N}{\partial t} + \text{div}(N_0 \delta \mathbf{v} + \delta N \mathbf{u}(t)) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) \frac{\left(\delta \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \delta \mathbf{v})}{c^2}\right)}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} &= -\frac{e}{m} \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi &= -4\pi e \delta N. \end{aligned} \quad (2)$$

Ограничиваясь колебаниями $\delta A \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, распространяющимися вдоль СВЧ поля, т. е. $\mathbf{u} \parallel \mathbf{k}$, систему (2) легко свести к одному уравнению для δN :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}\right) \delta N = -\omega_{Le}^2 \delta N, \quad (3)$$

где $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$. Далее с помощью замены

$$y = \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial t} \delta N \exp\left(i \int^t \mathbf{k}\mathbf{u}(t') dt'\right) \quad (4)$$

уравнение (3) сводим к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{u^2(t)}{c^2}\right)^{3/2} y = 0. \quad (5)$$

В случае слабого релятивизма, разлагая по степеням u^2/c^2 , из (5) получаем классическое уравнение Матье

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau)y = 0, \quad (6)$$

где $\tau = \omega_0 t$,

$$a = \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{3u_0^2}{4c^2}\right), \quad q = \frac{3}{2} a \frac{u_0^2}{c^2} \ll 1, \quad u_0 = \frac{eE_0}{m\omega_0}. \quad (7)$$

В зависимости от параметров a и q уравнение имеет как устойчивые, так и неустойчивые решения. В случае $q \ll 1$ неустойчивость возникает при $a = n^2$ или

$$n^2 \omega_0^2 = \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{3u_0^2}{4c^2}\right), \quad (8)$$

причем временной инкремент роста y (т. е. $\delta N \sim e^{\delta t}$) равен

$$\delta = \frac{3}{16} \omega_{Le} \frac{u_0^2}{c^2}.$$

Величина δ определяет и ширину параметрического резонанса при малых q .

Задача 11. Показать, что пучковая неустойчивость, обусловленная вынужденным черенковским излучением плазменных волн имеет место и в холодной столкновительной плазме.

Решение. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно ограничиться рассмотрением волн, распространяющихся вдоль скорости пучка \mathbf{u} , которую мы считаем параллельным оси $\mathbf{u} \parallel OZ$ и внешнего магнитного поля. В этом случае поле колебаний является потенциальным и дисперсионное уравнение колебаний записывается в виде (ср. с (359)):

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 - i \frac{\nu_e}{\omega}\right) - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - ku)^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ где u — скорость электронов пучка; кроме того, мы приняли, что $\omega_{Le} \gg \nu_e$ и пренебрегли столкновениями электронов пучка. Последнее оправдано, поскольку при энергиях электронов пучка, превышающих десятки киловольт, сечение кулоновского рассеяния оказывается столь малым, что их столкновения не играют никакой роли, в то время как столкновения тепловых электронов плазмы оказываются существенными.

В отсутствие пучка ($\omega_b \rightarrow 0$) уравнение (1) описывает затухающие плазменные колебания с известным спектром ($\omega \rightarrow \omega + i\delta$).

$$\omega = \omega_{Le}, \quad \delta = -\frac{\nu_e}{2}. \quad (2)$$

При наличии пучка эти колебания в условиях черенковского резонанса, когда $\omega = \omega_{Le} + i\delta = kv + i\delta$ оказываются нарастающими, причем неустойчивость обусловлена столкновениями электронов плазмы. Действительно из (1) находим:

$$\delta = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} + i}{2} \left(\frac{n_b}{2n_p} \right)^{1/3} \frac{\omega_{Le}}{\gamma} & \text{при } |\delta| \gg \nu_e, \\ \frac{i + 1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n_b}{2n_p} \frac{\omega_{Le}}{\gamma \nu_e} \right)^{1/2} \omega_{Le} & \text{при } |\delta| \ll \nu_e. \end{cases} \quad (3)$$

Верхнее выражение соответствует уже известному нам инкременту бесстолкновительной резонансной черенковской неустойчивости плазма-пучковой системы (347), а нижнее — диссипативной неустойчивости, обусловленной столкновениями электронов плазмы. Очевидно, что эта неустойчивость может быть реализована, если время ее развития меньше времени релаксации импульса электронов пучка, т. е. $|\delta| \gg \nu_b$

Задача 12. Исходя из уравнения (385) исследовать процесс вынужденного рассеяния падающей поперечной электромагнитной волны большой амплитуды на ионно-звуковых колебаниях неизотермической плазмы с $T_e \gg T_i$ (вынужденное рассеяние Манделъштама–Бриллюэна).

Решение. В области частот ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы $\omega_{Li}, kv_{Te} \gg \omega \gg kv_{Ti}$, а поэтому в уравнении (385) следует подставлять

$$\delta \varepsilon_e^l(\omega, k) = \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right), \quad \delta \varepsilon_i^l(\omega) = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2}. \quad (1)$$

Уравнение (385) при этом сводится к виду

$$k^2 r_{De}^2 - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} k^2 r_{De}^2 = \frac{k^2}{4(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \mathbf{v}_E]^2}{2\omega\omega_0 + c^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}. \quad (2)$$

Резонансный знаменатель в правой части (2) соответствует “красному” (стоксовскому) сателиту в поле рассеянной поперечной волны с частотным сдвигом $\omega_0 - \omega$

$$(\omega - \omega_0)^2 \varepsilon^{\text{tr}}(\omega_0 - \omega, k) - c^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 \simeq 2\omega\omega_0 + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0) \simeq 0. \quad (3)$$

В уравнении (385) не учтен “синий” сателит с частотным сдвигом $\omega_0 + \omega$. Легко понять, что его учет является очевидным — в (385) следует добавить соответствующее слагаемое с $\omega_0 + \omega$ и $\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}$. Учтем теперь малость мнимого слагаемого в уравнении (2) и будем искать его решение в виде $\omega = kv_s + i\delta$. При этом максимальное значение инкремента δ достигается в резонансе, когда выполнено условие (3) и равен

$$\delta = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m}{M} k^2 v_s^2 + \frac{\omega_{Li}^2}{4\omega_0 k v_s} \frac{[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}} - \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m}{M} k v_s} \right\}. \quad (4)$$

Видно, что всегда $\delta > 0$, а следовательно, имеет место беспороговое возбуждение ионно-звуковых волн при вынужденном рассеянии Манделъштама–Бриллюэна. Порог обусловлен требованием, чтобы за время развития неустойчивости столкновительное поглощение падающей поперечной волны было незначительным, что эквивалентно требованию

$$\delta > \frac{\nu_e \omega_{Le}^2}{2\omega_0^2}.$$

Задача 13. На примере “холодной” плазма-пучковой системы исследовать нелинейную динамику монохроматической продольной волны при развитии черенковской неустойчивости.

Решение. Рассматриваем нерелятивистский моноэнергетический электронный пучок, возбуждающий в плотной “холодной” бесстолкновительной плазме потенциальную, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ плазменную волну. Считая плазму линейной, запишем систему уравнений, описывающую нелинейную динамику одномерной пучковой неустойчивости в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(nv) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{e}{m} \nabla\Phi, \\ \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= -4\pi e(n - n_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$ — диэлектрическая проницаемость холодной плазмы, в которой $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ — плазменная частота, а n_0 — невозмущенная плотность электронов пучка. Считая все величины зависящими от $\tau = t - xk/\omega$ из системы (1) находим интегралы движения:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\left(\frac{\omega}{k} - v\right)} &= \frac{n_{0b}}{\left(\frac{\omega}{k} - u\right)} = C_1, \\ \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{k} - u\right)^2 &= \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{k} - v\right)^2 + e\Phi = C_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя эти интегралы, запишем уравнение Пуассона

$$\left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = \frac{\omega_b^2 \omega^2 m}{ek^2} \left[\frac{u - \frac{\omega}{u}}{\sqrt{\left(u - \frac{\omega}{u}\right)^2 - \frac{2e\Phi}{m}}} - 1 \right], \quad (3)$$

где $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_b/m}$ — ленгмюровская частота электронов пучка. В линейном приближении, разлагая правую часть по Φ и представив $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$ приходим к дисперсионному уравнению линейной теории (см уравнение (359)):

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - ku)^2} = 0. \quad (4)$$

Мы уже знаем, что это уравнение имеет неустойчивые решения в условиях черенковского резонанса, причем (см. (342)):

$$\delta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_{b0}}{2n_p} \right)^{1/3} \omega_p. \quad (5)$$

Амплитуда Φ будет расти со временем до тех пор, пока не нарушится условие разложения. Отсюда оцениваем амплитуду потенциала

$$e\Phi_{\max} = m \left(u - \frac{\omega}{k} \right)^2 \simeq \frac{m}{k^2} \delta^2 \approx \frac{mu^2}{2} \left(\frac{2n_{b0}}{n_{p0}} \right)^{2/3}, \quad (6)$$

а вместе с ней и энергию поля электростатической волны на стадии насыщения неустойчивости

$$\frac{E^2}{8\pi n_{b0} \frac{mu^2}{2}} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{n_{b0}}{n_{p0}} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

Такое насыщение пучковой неустойчивости, как легко понять, обусловлено захватом электронов пучка в потенциале поля возбуждаемой плазменной волны, что видно непосредственно из условия (6).

Литература

- [1] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.
- [2] *Александров А.Ф., Рухадзе А.А.* Лекции по электродинамике плазмоподобных сред: В 2 т. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999; 2002.
- [3] *Ахиезер А.И.* и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
- [4] *Крол Н., Трайвелтис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
- [5] Основы физики плазмы: В 2 т.; Дополнение / Под ред. Р.З. Сагдеева, М. Розенблюта. М.: Энергия, 1983; 1984.